離散数学 第 11 回
順序と同値関係 (3)：順序関係

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 7 月 17 日

最終更新：2012 年 7 月 18 日　10:46

概要

今日の目標

- 順序関係を図示する方法を理解する
  - ハッセ図
- 順序関係に関する概念を理解する
  - 上界，極大元，最大元，上限 (最小上界)
  - 下界，極小元，最小元，下限 (最大下界)
- 背理法による証明ができるようになる

(半) 順序関係：復習

集合 A と A 上の関係 R

半順序関係とは？

R が**半順序関係**であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は反対称性を持つ
- R は推移性を持つ

- 反射性：任意の $x \in A$ に対して，$x \, R \, x$
- 反対称性：任意の $x, y \in A$ に対して，$x \, R \, y$ かつ $y \, R \, x$ ならば $x = y$
- 推移性：任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \, R \, y$ かつ $y \, R \, z$ ならば $x \, R \, z$

全順序関係：復習

集合 A と A 上の関係 R

全順序関係とは？

R が**全順序関係**であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は反対称性を持つ
- R は推移性を持つ
- R は完全性を持つ

- 反射性：任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{R} x$
- 反対称性：任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} x$ ならば $x = y$
- 推移性：任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ ならば $x \mathrel{R} z$
- 完全性：任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{R} y$ または $y \mathrel{R} x$

半順序関係を表す記号

半順序関係を表すために，R ではなくて，特別な記号を使うことが多い

同値関係を表す記号の例

- $\leq$
- $\preceq$
- $\leqslant$
- $\preccurlyeq$
- $\subseteq$
- $\ldots$

その否定を表す記号の例

- $\not\leq$
- $\not\preceq$
- $\nleqslant$
- $\not\preccurlyeq$
- $\not\subseteq$
- $\ldots$

状況に応じて，使い分けられたりする
(この講義では専ら「$\preceq$」を用いていく)

半順序集合と全順序集合

半順序集合とは？

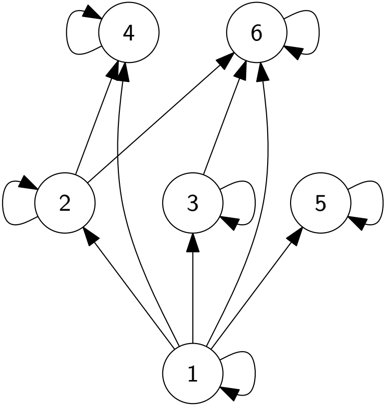
集合 A と A 上の半順序関係 $\preceq$ に対して
順序対 $(A, \preceq)$ を**半順序集合**と呼ぶ

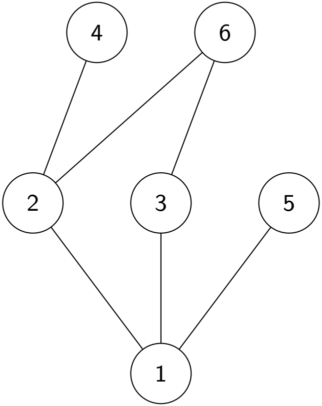
全順序集合とは？

集合 A と A 上の全順序関係 $\preceq$ に対して
順序対 $(A, \preceq)$ を**全順序集合**と呼ぶ

目次

ハッセ図：とりあえず例を見てみる



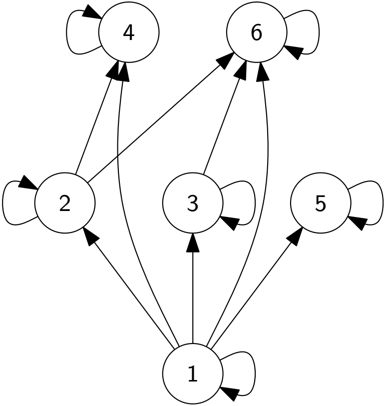


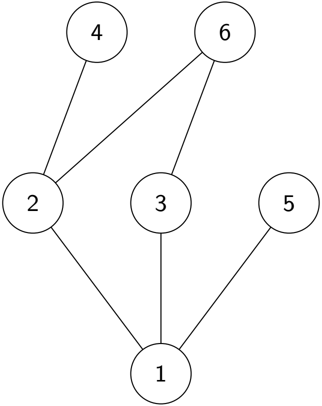
ハッセ図

ハッセ図とは？（常識に基づく定義）

半順序集合 $(A, \preceq)$ の**ハッセ図**とは，次の規則に従って描いた図

(1) A の各要素を点として描く



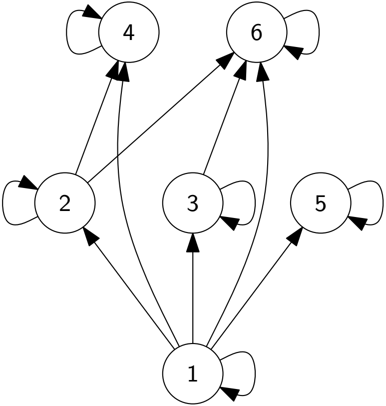


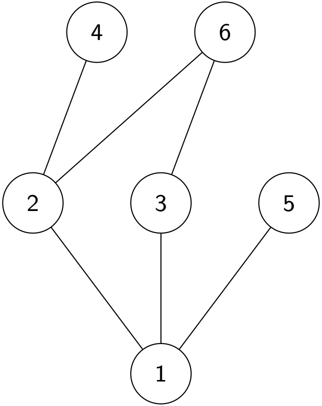
ハッセ図

ハッセ図とは？（常識に基づく定義）

半順序集合 $(A, \preceq)$ のハッセ図とは，次の規則に従って描いた図

(2) $\preceq$ **において大きい要素ほど上に描く**



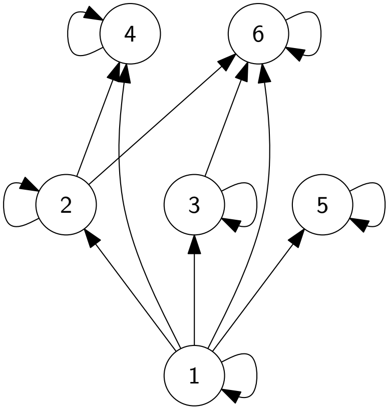


ハッセ図

ハッセ図とは？（常識に基づく定義）

半順序集合 $(A, \preceq)$ のハッセ図とは，次の規則に従って描いた図

(3) $x \preceq y$ で，x から y へ「遠回り」がないとき，x と y を線で結ぶ



比較可能性と比較不能性

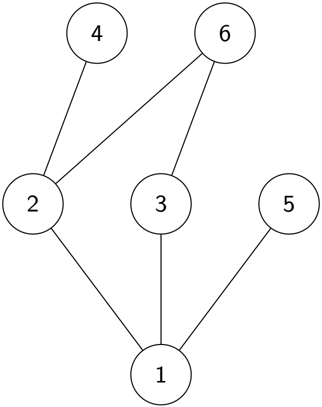
半順序集合 $(A, \preceq)$

比較可能とは？

- $x, y \in A$ が**比較可能**であるとは
  $x \preceq y$ または $y \preceq x$ であること
- そうでないとき，x, y は**比較不能**

例：

- 2 と 6 は比較可能
- 1 と 4 は比較可能
- 2 と 3 は比較不能
- 4 と 6 は比較不能

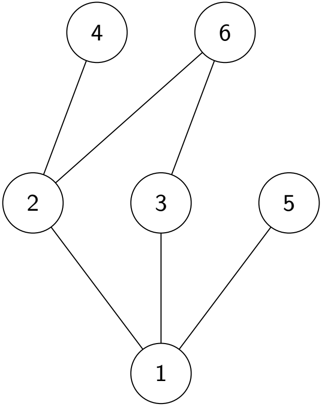


格言

比較不能なものを扱える半順序思考

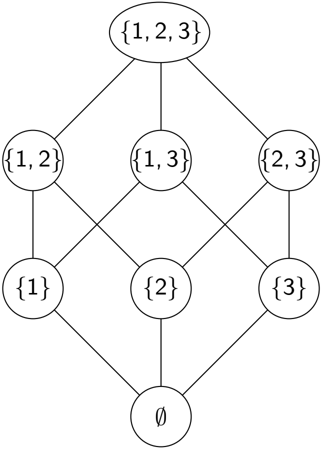
いろいろな半順序集合 (1)

$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ (「$a \mid b$」とは「a は b の約数」の意味)



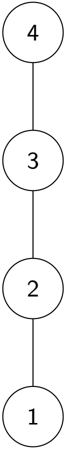
いろいろな半順序集合 (2)

$(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$

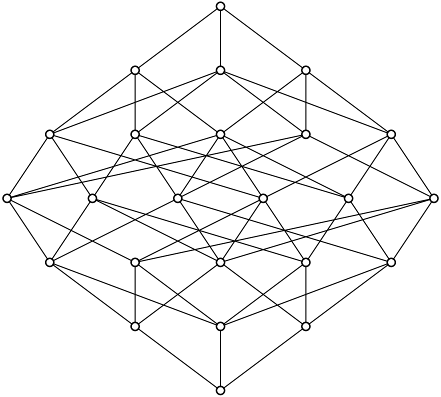


いろいろな半順序集合 (3)

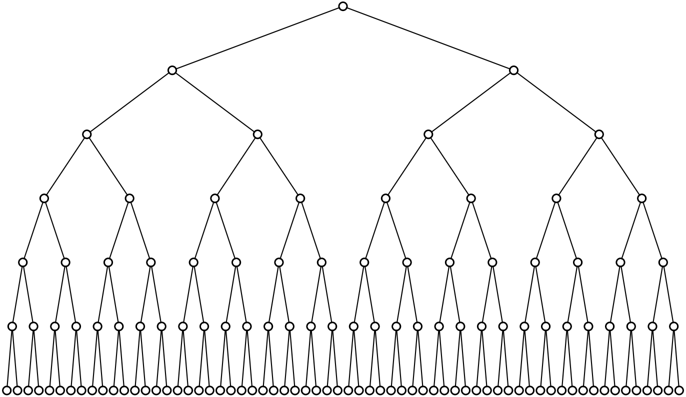
$(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$



いろいろな半順序集合 (4)



いろいろな半順序集合 (5)



その他の記法

半順序集合 $(A, \preceq)$

- 「$a \preceq b$」であることを「$b \succeq a$」とも書く
- 「$a \preceq b$ かつ $a \neq b$」であることを「$a \prec b$」と書く
- 「$a \prec b$」であることを「$b \succ a$」とも書く

注意

- 「$a \not\preceq b$」と「$a \succ b$」が同値であるとは限らない
- $\preceq$ が全順序関係ならば，この 2 つは同値

全順序関係の性質

証明すること

$(A, \preceq)$ が全順序集合であるとき，任意の $a, b \in A$ に対して

$$a \not\preceq b \quad \leftrightarrow \quad a \succ b$$

定義に基づいて書き直す

$$\neg(a \preceq b) \quad \leftrightarrow \quad b \preceq a \land a \neq b$$

全順序関係の性質：証明

任意に $a, b \in A$ を選ぶ．

全順序関係の性質：証明

任意に $a, b \in A$ を選ぶ.

- まず,「$a \succ b$ ならば $a \not\preceq b$」を証明する.

全順序関係の性質：証明

任意に $a, b \in A$ を選ぶ．

- まず，「$a \succ b$ ならば $a \not\preceq b$」を証明する．
- $b \preceq a$ かつ $a \neq b$ と仮定する．
- したがって，$a \not\preceq b$ となる．

全順序関係の性質：証明

任意に $a, b \in A$ を選ぶ．

- まず，「$a \succ b$ ならば $a \not\preceq b$」を証明する．
- $b \preceq a$ かつ $a \neq b$ と仮定する．
- 背理法による証明を行うために，$a \preceq b$ であると仮定する．

- したがって，$a \not\preceq b$ となる．

全順序関係の性質：証明

任意に $a, b \in A$ を選ぶ．

- まず，「$a \succ b$ ならば $a \not\preceq b$」を証明する．
- $b \preceq a$ かつ $a \neq b$ と仮定する．
- 背理法による証明を行うために，$a \preceq b$ であると仮定する．
- 反対称性から，$a = b$．

- したがって，$a \not\preceq b$ となる．

全順序関係の性質：証明

任意に $a, b \in A$ を選ぶ．

- まず，「$a \succ b$ ならば $a \not\preceq b$」を証明する．
- $b \preceq a$ かつ $a \neq b$ と仮定する．
- 背理法による証明を行うために，$a \preceq b$ であると仮定する．
- 反対称性から，$a = b$．
- これは $a \neq b$ という仮定に矛盾する．
- したがって，$a \not\preceq b$ となる．

全順序関係の性質：証明 (続)

- 次に，「$a \not\preceq b$ ならば $a \succ b$」を証明する．

全順序関係の性質：証明 (続)

- 次に，「$a \not\preceq b$ ならば $a \succ b$」を証明する．
- $a \preceq b$ でないと仮定する．
- 「$b \preceq a$」と「$a \neq b$」を証明すればよい．

全順序関係の性質：証明 (続)

- 次に,「$a \not\preceq b$ ならば $a \succ b$」を証明する.
- $a \preceq b$ でないと仮定する.
- 「$b \preceq a$」と「$a \neq b$」を証明すればよい.
- [$b \preceq a$ の証明]
- [$a \neq b$ の証明]

全順序関係の性質：証明 (続)

- 次に，「$a \not\preceq b$ ならば $a \succ b$」を証明する．
- $a \preceq b$ でないと仮定する．
- 「$b \preceq a$」と「$a \neq b$」を証明すればよい．
- [$b \preceq a$ の証明]
- 完全性から，$a \preceq b$ または $b \preceq a$ となる．
- [$a \neq b$ の証明]

全順序関係の性質：証明 (続)

- 次に,「$a \not\preceq b$ ならば $a \succ b$」を証明する.
- $a \preceq b$ でないと仮定する.
- 「$b \preceq a$」と「$a \neq b$」を証明すればよい.
- [$b \preceq a$ の証明]
- 完全性から，$a \preceq b$ または $b \preceq a$ となる.
- $a \preceq b$ でないので，$b \preceq a$ となる.
- [$a \neq b$ の証明]

全順序関係の性質：証明 (続)

- 次に，「$a \not\preceq b$ ならば $a \succ b$」を証明する．
- $a \preceq b$ でないと仮定する．
- 「$b \preceq a$」と「$a \neq b$」を証明すればよい．
- [$b \preceq a$ の証明]
- 完全性から，$a \preceq b$ または $b \preceq a$ となる．
- $a \preceq b$ でないので，$b \preceq a$ となる．
- [$a \neq b$ の証明]
- 背理法による証明を行うために，$a = b$ であると仮定する．

全順序関係の性質：証明 (続)

- 次に,「$a \not\preceq b$ ならば $a \succ b$」を証明する.
- $a \preceq b$ でないと仮定する.
- 「$b \preceq a$」と「$a \neq b$」を証明すればよい.
- [$b \preceq a$ の証明]
- 完全性から，$a \preceq b$ または $b \preceq a$ となる.
- $a \preceq b$ でないので，$b \preceq a$ となる.
- [$a \neq b$ の証明]
- 背理法による証明を行うために，$a = b$ であると仮定する.
- 反射性から，$a \preceq b$ となる.

全順序関係の性質：証明 (続)

- 次に,「$a \not\preceq b$ ならば $a \succ b$」を証明する.
- $a \preceq b$ でないと仮定する.
- 「$b \preceq a$」と「$a \neq b$」を証明すればよい.
- [$b \preceq a$ の証明]
- 完全性から，$a \preceq b$ または $b \preceq a$ となる.
- $a \preceq b$ でないので，$b \preceq a$ となる.
- [$a \neq b$ の証明]
- 背理法による証明を行うために，$a = b$ であると仮定する.
- 反射性から，$a \preceq b$ となる.
- これは $a \preceq b$ でないことに矛盾する.

全順序関係の性質：証明 (続)

- 次に,「$a \not\preceq b$ ならば $a \succ b$」を証明する.
- $a \preceq b$ でないと仮定する.
- 「$b \preceq a$」と「$a \neq b$」を証明すればよい.
- [$b \preceq a$ の証明]
- 完全性から，$a \preceq b$ または $b \preceq a$ となる.
- $a \preceq b$ でないので，$b \preceq a$ となる.
- [$a \neq b$ の証明]
- 背理法による証明を行うために，$a = b$ であると仮定する.
- 反射性から，$a \preceq b$ となる.
- これは $a \preceq b$ でないことに矛盾する.
- したがって，$a \neq b$ となる. □

テンプレート：導く性質に ¬ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
◯◯◯	$\neg P$

変更後

使える性質	導く性質
◯◯◯	$\neg P$
P	矛盾 (F)

これは**背理法**と呼ばれる証明手法

テンプレート：導く性質に ¬ があるとき (証明の雛形)

背理法による証明を行うために，P であると仮定する．

ここで矛盾を結論として導く．

したがって，$\neg P$ が成立する．

テンプレート：使える性質に ¬ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$\neg P$	○○○
P	

変更後

使える性質	導く性質
$\neg P$	○○○
P	
矛盾 (F)	

テンプレート：使える性質に $\neg$ があるとき (証明の雛形)

$\neg P$ は P に矛盾する．

目次

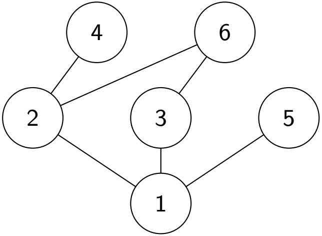
上界

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上界とは？

集合 B の**上界**とは，要素 $a \in A$ で，次を満たすもの

$$\text{すべての } b \in B \text{ に対して } b \preceq a$$



- 6 は $\{2, 3\}$ の上界
- 4 は $\{2\}$ の上界
- 2 は $\{2\}$ の上界
- $\{2, 5\}$ の上界は存在しない

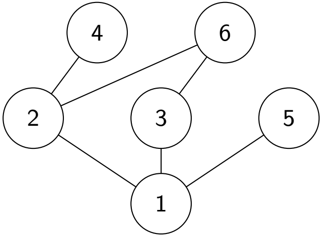
下界

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の下界 (かかい) とは？

集合 B の**下界**とは，要素 $a \in A$ で，次を満たすもの

すべての $b \in B$ に対して $a \preceq b$



- 1 は $\{2, 3\}$ の下界
- 1 は $\{2\}$ の下界
- 2 は $\{2\}$ の下界
- 2 は $\{2, 6\}$ の下界
- 1 は $\{2, 6\}$ の下界

目次

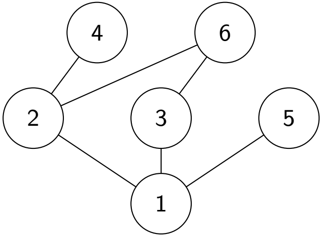
極大元

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の極大元とは？

集合 B の**極大元**とは，要素 $b \in B$ で，次を満たすもの

すべての $b' \in B$ に対して ($b \preceq b'$ ならば $b = b'$)



- 2 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元ではない
- 3 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元
- 4 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元

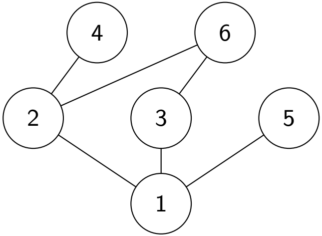
極小元

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の極小元とは？

集合 B の**極小元**とは，要素 $b \in B$ で，次を満たすもの

$$\text{すべての } b' \in B \text{ に対して } (b' \preceq b \text{ ならば } b = b')$$



- 2 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元
- 3 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元
- 4 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元ではない

極大元が存在しない例

- 半順序集合 $(\mathbb{R}, \leq)$ (注：これは全順序集合でもある)
- $B = (-1, 0) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ かつ $-1 < x < 0\}$
- このとき，B の極大元は存在しない

これを証明する

証明すべきこと (定義に戻って書き直す)

$\neg(\exists\ b \in (-1, 0)\ (\forall\ b' \in (-1, 0)\ (b \leq b' \rightarrow b = b')))$

証明すべきこと (同値変形：含意の除去)

$\neg(\exists\ b \in (-1, 0)\ (\forall\ b' \in (-1, 0)\ (b > b' \vee b = b')))$

証明すべきこと (同値変形)

$\forall\ b \in (-1, 0)\ (\exists\ b' \in (-1, 0)\ (b \leq b' \wedge b \neq b'))$

極大元が存在しない例：証明

- 任意の $b \in (-1, 0)$ を考える．
- このとき，$\frac{b-1}{2} \in (-1, 0)$ かつ $\frac{b-1}{2} \leq b$ かつ $b \neq \frac{b-1}{2}$．
- したがって，ある $b' \in (-1, 0)$ が存在して，$b \leq b'$ かつ $b \neq b'$ となる．
- したがって，$(-1, 0)$ の極大元は存在しない． $\square$

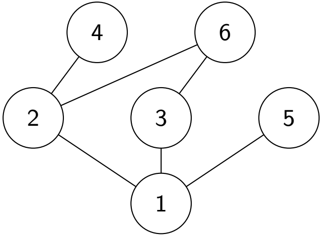
最大元

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の最大元とは？

集合 B の最大元とは，要素 $b \in B$ で，次を満たすもの

$$\text{すべての } b' \in B \text{ に対して } b' \preceq b$$



- **2 は $\{2, 3, 6\}$ の最大元ではない**
- **6 は $\{2, 3, 6\}$ の最大元**
- **$\{2, 3\}$ の最大元は存在しない**

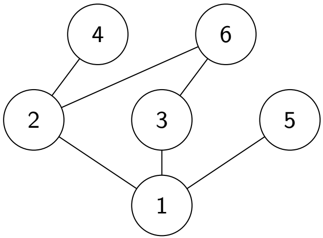
最小元

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の最小元とは？

集合 B の**最小元**とは，要素 $b \in B$ で，次を満たすもの

すべての $b' \in B$ に対して $b \preceq b'$



- 2 は $\{1, 2, 3\}$ の最小元ではない
- 1 は $\{1, 2, 3\}$ の最小元
- $\{2, 3\}$ の最小元は存在しない

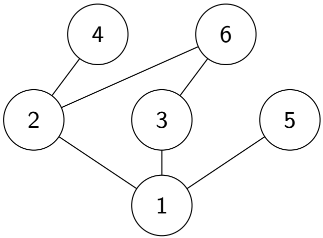
上限 (最小上界)

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上限とは？

集合 B の**上限**とは，B の上界 $a \in A$ で，次を満たすもの

$$\text{すべての } B \text{ の上界 } a' \in A \text{ に対して } a \preceq a'$$



- 6 は $\{2, 3\}$ の上限
- 2 は $\{2\}$ の上限

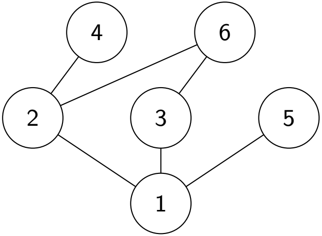
下限 (最大下界)

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の下限とは？

集合 B の**下限**とは，B の下界 $a \in A$ で，次を満たすもの

$$\text{すべての } B \text{ の下界 } a' \in A \text{ に対して } a' \preceq a$$



- 1 は $\{2, 3\}$ の下限
- 2 は $\{2\}$ の下限

様々な性質

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

- **B の最大元は，存在するならば，ただ一つ．**
- **B の最小元は，存在するならば，ただ一つ．**
- **B の上限は，存在するならば，ただ一つ．**
- **B の下限は，存在するならば，ただ一つ．**

証明は演習問題

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 順序関係を図示する方法を理解する
  - ハッセ図
- 順序関係に関する概念を理解する
  - 上界，極大元，最大元，上限 (最小上界)
  - 下界，極小元，最小元，下限 (最大下界)
- 背理法による証明ができるようになる

目次

1. ハッセ図
2. 上界と下界
3. その他の用語
   - 極大元，極小元
   - 最大元，最小元
   - 上限 (最小上界)，下限 (最大下界)
4. 今日のまとめ