# 離散数学 第 10 回
# 順序と同値関係 (2)：同値関係

**岡本 吉央**
okamotoy@uec.ac.jp

**電気通信大学**

2012 年 7 月 10 日

最終更新：2012 年 7 月 9 日　09:53

## スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (6 月 5 日)
- 8 関数 (2) 全射と単射 (6 月 12 日)
- ⋆ 台風による休講 (6 月 19 日)
- ⋆ 休講 (6 月 26 日)
- 9 順序と同値関係 (1) 関係 (7 月 3 日)
- 10 順序と同値関係 (2) 同値関係 (7 月 10 日)
- 11 順序と同値関係 (3) 順序関係 (7 月 17 日)
- 12 数学的帰納法 (7 月 24 日)
- 13 グラフと木 (7 月 31 日？)

**注意：予定の変更もありうる**

# 概要

## 今日の目標

- 同値関係と分割の関係を理解する
  - 分割とは？
  - 分割から同値関係へ
  - 同値関係から分割へ
    - 同値分割と商集合

# 同値関係

集合 $A$ と $A$ 上の関係 $R$

**同値関係とは？**

$R$ が**同値関係**であるとは，次を満たすこと

- $R$ は反射性を持つ
- $R$ は対称性を持つ
- $R$ は推移性を持つ

- 反射性：任意の $x \in A$ に対して，$x\,R\,x$
- 対称性：任意の $x, y \in A$ に対して，$x\,R\,y$ ならば $y\,R\,x$
- 推移性：任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x\,R\,y$ かつ $y\,R\,z$ ならば $x\,R\,z$

## 同値関係を表す記号

同値関係を表すために，$R$ ではなくて，特別な記号を使うことが多い

**同値関係を表す記号の例**

- $=$
- $\equiv$
- $\sim$
- $\simeq$
- $\approx$
- $\ldots$

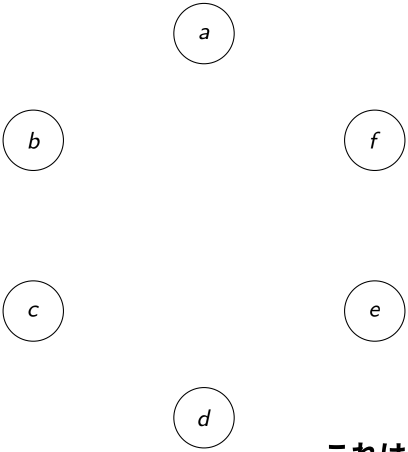
**その否定を表す記号の例**

- $\neq$
- $\not\equiv$
- $\not\sim$
- $\not\simeq$
- $\not\approx$
- $\ldots$

状況に応じて，使い分けられたりする

# 同値関係をグラフで描くとき...

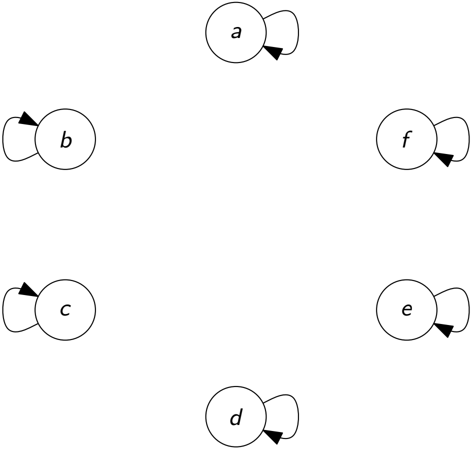
## これが同値関係を表すグラフだとすると？



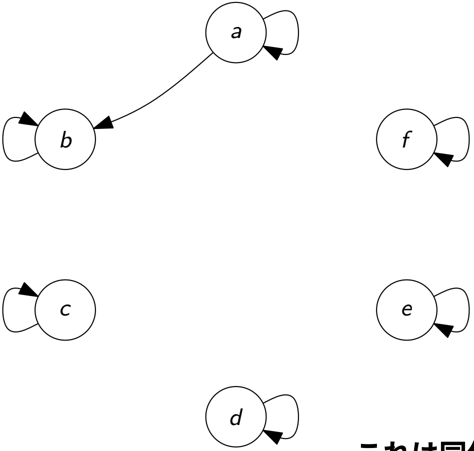

**これは同値関係を表さない**

# 同値関係をグラフで描くとき...

**これが同値関係を表すグラフだとすると？**

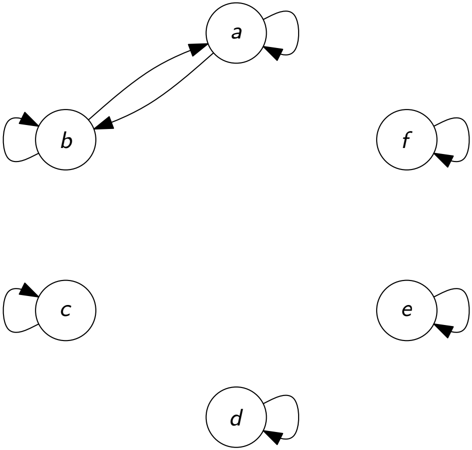


これが同値関係を表すグラフだとすると？

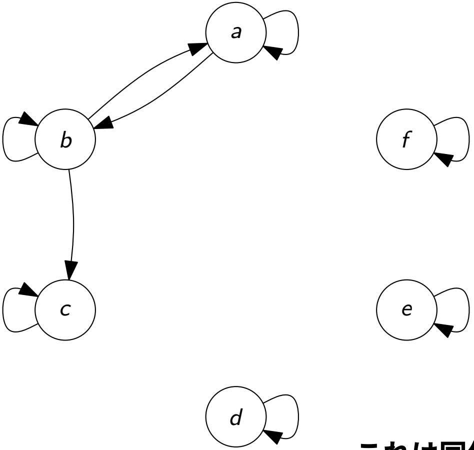



これは同値関係を表さない

**これが同値関係を表すグラフだとすると？**



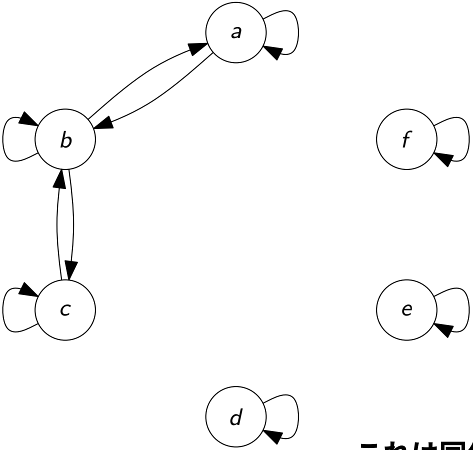
## これが同値関係を表すグラフだとすると？




**これは同値関係を表さない**

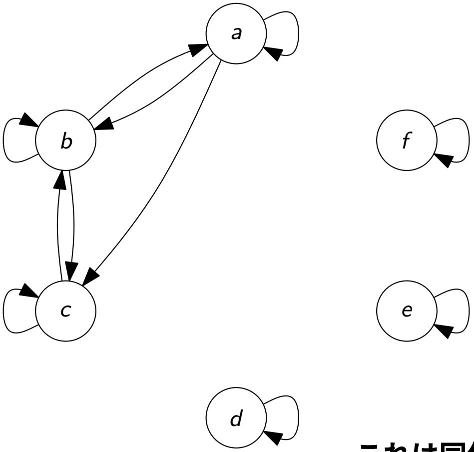
# 同値関係をグラフで描くとき...

**これが同値関係を表すグラフだとすると？**



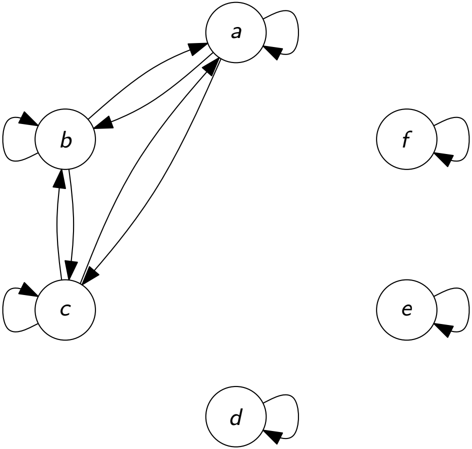

**これは同値関係を表さない**

これが同値関係を表すグラフだとすると？

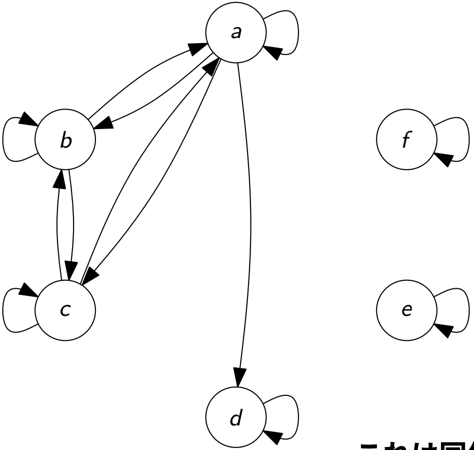



これは同値関係を表さない

**これが同値関係を表すグラフだとすると？**



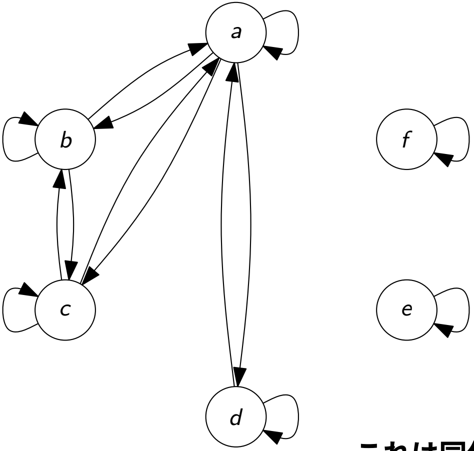
**これが同値関係を表すグラフだとすると？**




**これは同値関係を表さない**

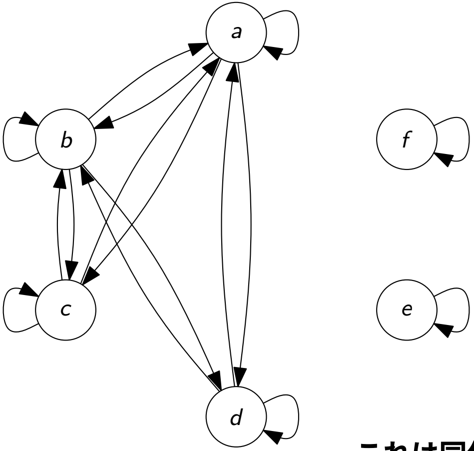
# 同値関係をグラフで描くとき...

**これが同値関係を表すグラフだとすると？**




**これは同値関係を表さない**

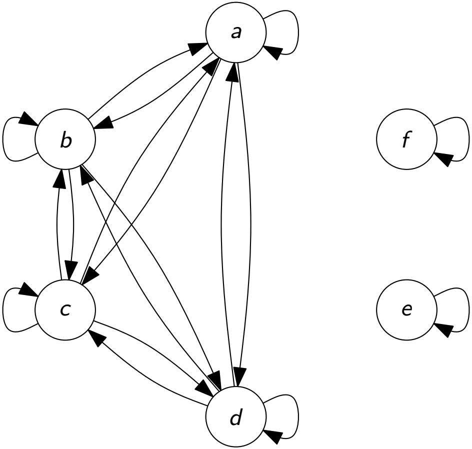
## これが同値関係を表すグラフだとすると？




**これは同値関係を表さない**

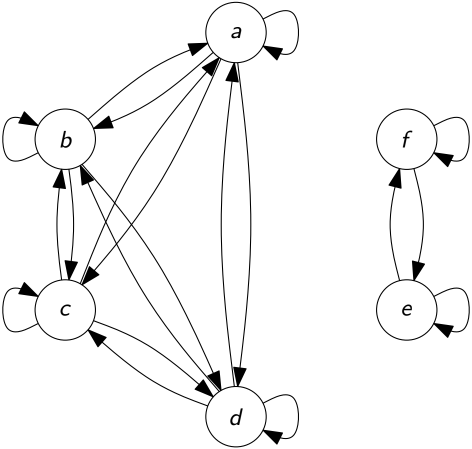
# 同値関係をグラフで描くとき...

**これが同値関係を表すグラフだとすると？**

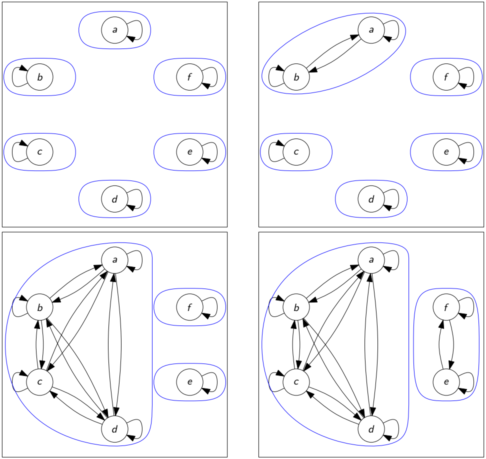


# 同値関係をグラフで描くとき...

**これが同値関係を表すグラフだとすると？**



# 同値関係が与える「かたまり」への分割



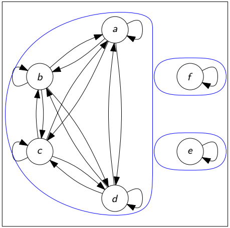
# 今日の目標

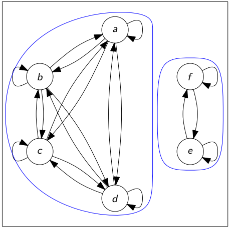
## 今から行うこと

次を証明する

- 「同値関係」から「『かたまり』への分割」が得られること
- 「『かたまり』への分割」から「同値関係」が得られること

つまり,「同値関係」と「分割」は同じものを別の方法で表現している



# 目次

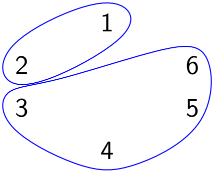
# 集合の分割

**分割とは？**

集合 $A$ の**分割**とは次を満たすような集合 $P$ のこと

- 任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$ (非空性)
- 任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$ (素性)
- 任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ (被覆性)

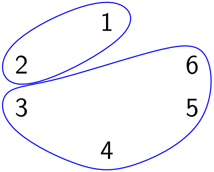
例：$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ のとき，$\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$ は $A$ の分割



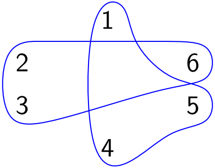
# 分割とは ?: 例 (続き)

**次の 4 つはどれも** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **の分割**

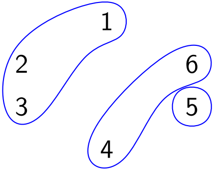
$\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$



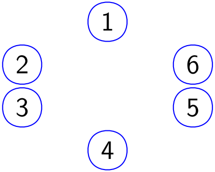

$\{\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}\}$




$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$




$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$



# 分割の例：カレンダー

1ヵ月の 31 日をいろいろな方法で分割している

| 日 | 月 | 火 | 水 | 木 | 金 | 土 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | 31 | | | | |

- 1 日 1 日で分割 (31 個の集合へ分割)
- 週ごとに分割 (5 個の集合へ分割)
- 曜日ことに分割 (7 個の集合へ分割)
- …

# 目次

# 分割から同値関係へ

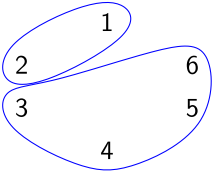
**集合 $A$ の分割 $P$ を考える**

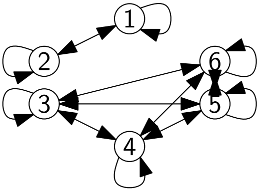
**分割から同値関係へ**

- **$A$ 上の関係 $R$ を，任意の $x, y \in A$ に対して**

$$x \mathrel{R} y \text{ であることは } \exists\, X \in P\ (x \in X \wedge y \in X)$$

  **として定義する**
- **このとき，$R$ は $A$ 上の同値関係である**



# 分割から同値関係へ：証明 (反射性)

**証明すべきこと (1)：反射性**

任意の $x \in A$ に対して，$x \, R \, x$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- したがって，$x \, R \, x$． $\square$

# 分割から同値関係へ：証明 (反射性)

**証明すべきこと (1)：反射性**

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{R} x$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- $P$ は $A$ の分割なので，分割の被覆性から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$．
- したがって，$x \mathrel{R} x$． $\square$

# 分割から同値関係へ：証明 (反射性)

**証明すべきこと (1)：反射性**

任意の $x \in A$ に対して，$x\,R\,x$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- $P$ は $A$ の分割なので，分割の被覆性から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$．
- したがって，ある $X \in P$ が存在して $x \in X$ かつ $x \in X$．
- したがって，$x\,R\,x$． $\square$

# 分割から同値関係へ：証明 (対称性)

**証明すべきこと (2)：対称性**

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{R} y$ ならば $y \mathrel{R} x$

証明：任意に $x, y \in A$ を選び，$x \mathrel{R} y$ と仮定する．

- したがって，$y \mathrel{R} x$． □

## 分割から同値関係へ：証明 (対称性)

**証明すべきこと (2)：対称性**

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \, R \, y$ ならば $y \, R \, x$

証明：任意に $x, y \in A$ を選び，$x \, R \, y$ と仮定する．

- $R$ の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- したがって，$y \, R \, x$． $\square$

## 分割から同値関係へ：証明 (対称性)

**証明すべきこと (2)：対称性**

任意の $x, y \in A$ に対して，$x\,R\,y$ ならば $y\,R\,x$

<u>証明</u>：任意に $x, y \in A$ を選び，$x\,R\,y$ と仮定する．

- $R$ の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- すなわち，ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$．
- したがって，$y\,R\,x$． $\square$

# 分割から同値関係へ：証明 (推移性)

**証明すべきこと (3)：推移性**

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ ならば $x \mathrel{R} z$

証明：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ と仮定する．

- したがって，$x \mathrel{R} z$． □

## 分割から同値関係へ：証明 (推移性)

**証明すべきこと (3)：推移性**

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \, R \, y$ かつ $y \, R \, z$ ならば $x \, R \, z$

**証明**：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \, R \, y$ かつ $y \, R \, z$ と仮定する．

- $R$ の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- したがって，$x \, R \, z$． □

# 分割から同値関係へ：証明 (推移性)

**証明すべきこと (3)：推移性**

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ ならば $x \mathrel{R} z$

**証明**：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ と仮定する．

- $R$ の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$．

- したがって，$x \mathrel{R} z$． □

# 分割から同値関係へ：証明 (推移性)

**証明すべきこと (3)：推移性**

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ ならば $x \mathrel{R} z$

<u>証明</u>：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ と仮定する．

- $R$ の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$．
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$．
- したがって，$x \mathrel{R} z$． $\square$

## 分割から同値関係へ：証明 (推移性)

**証明すべきこと (3)：推移性**

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x\,R\,y$ かつ $y\,R\,z$ ならば $x\,R\,z$

証明：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x\,R\,y$ かつ $y\,R\,z$ と仮定する．

- $R$ の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$．
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$．
- 特に，$X \cap X' \neq \emptyset$．
- したがって，$x\,R\,z$． □

# 分割から同値関係へ：証明 (推移性)

**証明すべきこと (3)：推移性**

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ ならば $x \mathrel{R} z$

**証明**：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ と仮定する．

- $R$ の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$．
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$．
- 特に，$X \cap X' \neq \emptyset$．
- 分割の素性から，$X = X'$．

- したがって，$x \mathrel{R} z$． □

# 分割から同値関係へ：証明 (推移性)

**証明すべきこと (3)：推移性**

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x\,R\,y$ かつ $y\,R\,z$ ならば $x\,R\,z$

**証明**：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x\,R\,y$ かつ $y\,R\,z$ と仮定する．

- $R$ の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$．
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$．
- 特に，$X \cap X' \neq \emptyset$．
- 分割の素性から，$X = X'$．
- したがって，$x \in X$ かつ $z \in X$．
- したがって，$x\,R\,z$． $\square$

# 目次

1. 分割
2. 分割から同値関係へ
3. **同値関係から分割へ**
4. 今日のまとめ

# 同値類

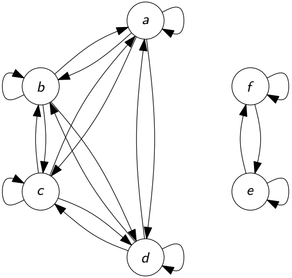
## 集合 $A$ 上の同値関係 $R$ を考える

### 同値類とは？

同値関係 $R$ における要素 $a \in A$ の**同値類**とは

$$\{x \mid x \in A \text{ かつ } x \mathrel{R} a\}$$

という集合のことであり，これを $[a]_R$ とも書く




- $[a]_R = \{a, b, c, d\}$
- $[b]_R = \{a, b, c, d\}$
- $[c]_R = \{a, b, c, d\}$
- $[d]_R = \{a, b, c, d\}$
- $[e]_R = \{e, f\}$
- $[f]_R = \{e, f\}$

# 同値関係から分割へ

**集合 $A$ 上の同値関係 $R$ を考える**

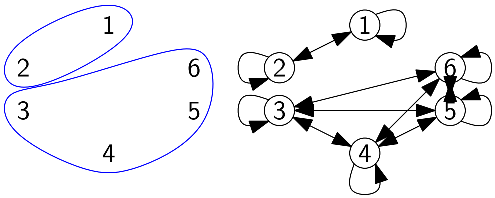
## 同値関係から分割へ

- **$A$ の部分集合の集合 $P$ を次のように定義する**

$$P = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

- **このとき，$P$ は $A$ の分割になる**

**このような $A$ の分割を，$R$ に関する $A$ の同値分割と呼ぶ**



# 商集合

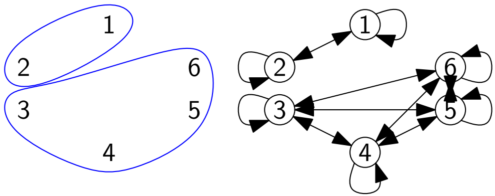
**同値分割のことを商集合とも呼ぶ**

**商集合とは？**

**集合 $A$ 上の同値関係 $R$ に対して，$R$ による $A$ の同値分割を**

$$A \,/\, R$$

**と書き，これを $R$ に関する $A$ の商集合と呼ぶ．**




$A \,/\, R = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$

# 同値関係から分割へ：証明 (非空性)

**証明すべきこと (1)：非空性**

任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in P$ を選ぶ．

- したがって，$X \subseteq A$.
- したがって，$X \neq \emptyset$. □

# 同値関係から分割へ：証明 (非空性)

**証明すべきこと (1)：非空性**

任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in P$ を選ぶ．

- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- したがって，$X \subseteq A$．
- したがって，$X \neq \emptyset$． □

# 同値関係から分割へ：証明 (非空性)

**証明すべきこと (1)：非空性**

任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in P$ を選ぶ．

- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同値類の定義から，$[a]_R \subseteq A$．
- したがって，$X \subseteq A$．

- したがって，$X \neq \emptyset$． □

# 同値関係から分割へ：証明 (非空性)

**証明すべきこと (1)：非空性**

任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in P$ を選ぶ．

- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同値類の定義から，$[a]_R \subseteq A$．
- したがって，$X \subseteq A$．

- したがって，$[a]_R \neq \emptyset$．
- したがって，$X \neq \emptyset$． □

# 同値関係から分割へ：証明 (非空性)

**証明すべきこと (1)：非空性**

任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in P$ を選ぶ．

- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同値類の定義から，$[a]_R \subseteq A$．
- したがって，$X \subseteq A$．
- 同値関係の反射性から，$a \, R \, a$．
- したがって，$[a]_R \neq \emptyset$．
- したがって，$X \neq \emptyset$．

□

# 同値関係から分割へ：証明 (非空性)

**証明すべきこと (1)：非空性**

任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in P$ を選ぶ．

- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同値類の定義から，$[a]_R \subseteq A$．
- したがって，$X \subseteq A$．

- 同値関係の反射性から，$a \mathrel{R} a$．
- 同値類の定義から，$a \in [a]_R$．
- したがって，$[a]_R \neq \emptyset$．
- したがって，$X \neq \emptyset$． □

## 同値関係から分割へ：証明 (素性)

**証明すべきこと (2)：素性**

任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．

**証明**：任意に $X, Y \in P$ を選ぶ．

- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$． □

## 同値関係から分割へ：証明 (素性)

**証明すべきこと (2)：素性**

任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．

<u>証明</u>：任意に $X, Y \in P$ を選ぶ．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する．

- したがって，$X = Y$．
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$． □

# 同値関係から分割へ：証明 (素性)

**証明すべきこと (2)：素性**

任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．

**証明**：任意に $X, Y \in P$ を選ぶ．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する．
- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- したがって，$X = Y$．
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$． □

# 同値関係から分割へ：証明 (素性)

**証明すべきこと (2)：素性**

任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．

<u>証明</u>：任意に $X, Y \in P$ を選ぶ．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する．
- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_R$．

- したがって，$X = Y$．
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$． □

# 同値関係から分割へ：証明 (素性)

**証明すべきこと (2)：素性**

任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．

証明：任意に $X, Y \in P$ を選ぶ．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する．
- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_R$．
- $X \cap Y \neq \emptyset$ から，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$．

- したがって，$X = Y$．
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．　□

# 同値関係から分割へ：証明 (素性)

**証明すべきこと (2)：素性**

任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．

証明：任意に $X, Y \in P$ を選ぶ．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する．
- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_R$．
- $X \cap Y \neq \emptyset$ から，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$．
- すなわち，$a'' \in [a]_R$ かつ $a'' \in [a']_R$．

- したがって，$X = Y$．
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$． □

# 同値関係から分割へ：証明 (素性)

**証明すべきこと (2)：素性**

任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．

証明：任意に $X, Y \in P$ を選ぶ．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する．
- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_R$．
- $X \cap Y \neq \emptyset$ から，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$．
- すなわち，$a'' \in [a]_R$ かつ $a'' \in [a']_R$．
- 同値類の定義から，$a'' \mathrel{R} a$ かつ $a'' \mathrel{R} a'$．

- したがって，$X = Y$．
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$． □

# 同値関係から分割へ：証明 (素性)

**証明すべきこと (2)：素性**

任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．

証明：任意に $X, Y \in P$ を選ぶ．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する．
- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_R$．
- $X \cap Y \neq \emptyset$ から，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$．
- すなわち，$a'' \in [a]_R$ かつ $a'' \in [a']_R$．
- 同値類の定義から，$a'' \mathrel{R} a$ かつ $a'' \mathrel{R} a'$．
- $a'' \mathrel{R} a$ と同値関係の対称性から，$a \mathrel{R} a''$．

- したがって，$X = Y$．
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．　□

# 同値関係から分割へ：証明 (素性)

**証明すべきこと (2)：素性**

任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．

証明：任意に $X, Y \in P$ を選ぶ．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する．
- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_R$．
- $X \cap Y \neq \emptyset$ から，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$．
- すなわち，$a'' \in [a]_R$ かつ $a'' \in [a']_R$．
- 同値類の定義から，$a'' \mathrel{R} a$ かつ $a'' \mathrel{R} a'$．
- $a'' \mathrel{R} a$ と同値関係の対称性から，$a \mathrel{R} a''$．
- $a \mathrel{R} a''$，$a'' \mathrel{R} a'$ と同値関係の推移性から，$a \mathrel{R} a'$．

- したがって，$X = Y$．
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$． □

# 同値関係から分割へ：証明 (素性)

## 証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．

証明：任意に $X, Y \in P$ を選ぶ．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する．
- $P$ の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_R$．
- $X \cap Y \neq \emptyset$ から，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$．
- すなわち，$a'' \in [a]_R$ かつ $a'' \in [a']_R$．
- 同値類の定義から，$a'' \mathrel{R} a$ かつ $a'' \mathrel{R} a'$．
- $a'' \mathrel{R} a$ と同値関係の対称性から，$a \mathrel{R} a''$．
- $a \mathrel{R} a''$，$a'' \mathrel{R} a'$ と同値関係の推移性から，$a \mathrel{R} a'$．
- $a \mathrel{R} a'$ から，$[a]_R = [a']_R$．　(演習問題)
- したがって，$X = Y$．
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．　□

# 同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

**証明すべきこと (3)：被覆性**

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$

**証明**：任意に $x \in A$ を選ぶ．

# 同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

**証明すべきこと (3)：被覆性**

**任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$**

**証明**：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- $X = [x]_R$ とする．

- したがって，$x \in X$． □

# 同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

**証明すべきこと (3)：被覆性**

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- $X = [x]_R$ とする．
- 反射性から，$x R x$．
- したがって，$x \in X$．

$\square$

# 同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

**証明すべきこと (3)：被覆性**

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$

**証明**：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- $X = [x]_R$ とする．
- 反射性から，$x \, R \, x$．
- 同値類の定義から，$x \in [x]_R$．
- したがって，$x \in X$． $\square$

# 目次

# 今日のまとめ

## 今日の目標

- 同値関係と分割の関係を理解する
  - 分割とは？
  - 分割から同値関係へ
  - 同値関係から分割へ
    - 同値分割と商集合

## 格言

本質的に同一であるものが，異なる表現を持つことはよくある

# 目次