離散数学 第 7 回
関数 (1)：関数，像と逆像

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 5 月 29 日

最終更新：2012 年 6 月 14 日　23:43

スケジュール 前半 (済)

1. 論理 (1) 命題論理 (4 月 10 日)
- ⋆ 休講 (健康診断) (4 月 17 日)
2. 集合 (1) 集合とは何か (4 月 24 日)
3. 論理 (2) 述語論理 (5 月 1 日)
4. 集合 (2) 論理を用いた証明 (5 月 8 日)
5. 集合 (2) 論理を用いた証明 (続) (5 月 15 日)
6. 集合 (3) 集合演算など (5 月 22 日)
7. 関数 (1) 関数，像と逆像 (5 月 29 日)

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (6 月 5 日)
- 8 関数 (2) 全射と単射 (6 月 12 日)
- 9 順序と同値関係 (1) 関係 (6 月 19 日)
- ⋆ 休講 (6 月 26 日)
- 10 順序と同値関係 (2) 順序関係 (7 月 3 日)
- 11 順序と同値関係 (3) 同値関係 (7 月 10 日)
- 12 数学的帰納法 (7 月 17 日)
- 13 グラフと木 (1) グラフ (7 月 24 日)
- 14 グラフと木 (2) 木 (7 月 31 日？)

注意：予定の変更もありうる

演習問題について

レポートにして提出してもらえばコメントを付けて返却を

- 注：レポート提出自体が成績に考慮されることはない
- (レポート提出を行う必要はない)
- 注：コメントは解答を提示するものではない
- 提出は手渡しでもメールでも可
- 提出 1 週間後には返却可の状態になる
- 基本的に返却は講義のとき (メールでの返却も可)
- どの問題に対する解答なのか明示すること
- 氏名を記載すること

概要

今日の目標

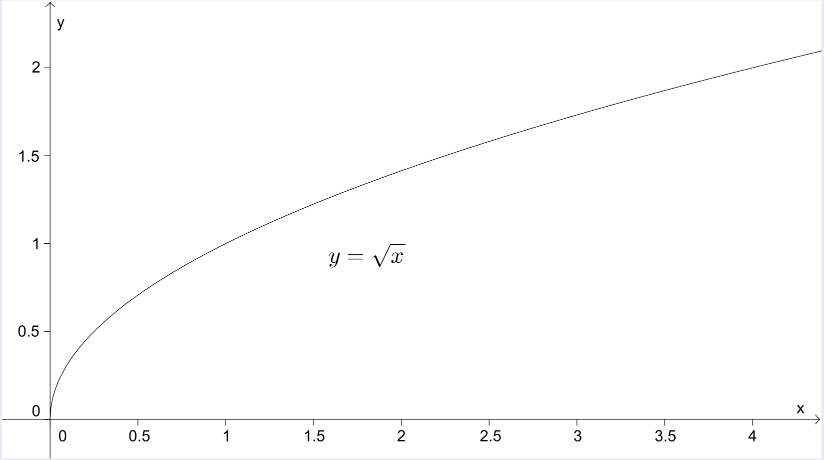
- 関数 (写像) の定義と記法を理解し，使えるようになる
- 関数の像と逆像，関数の合成を理解する
- 「論理を用いた証明」がさらに使えるようになる
  - 新しいテンプレートが使えるようになる

目次

関数と言って思い浮かべるものは？ (1)

数学 (?) の「関数」

関数 $y = \sqrt{x}$



関数と言って思い浮かべるものは？ (2)

プログラミングの「関数」

```
int sum(int a, int b) {
  return a + b;
}

int absolute_value(int a) {
  if (a < 0) {
    return -a;
  } else {
    return a;
  }
}
```

関数とは

関数とは？

- 集合が 2 つある (A と B とする)
- A の 1 つ 1 つの要素を B のある要素に「移す」

数学的に関数を定義すると？

- 任意の $a \in A$ に対して，ある $b \in B$ が**一意に** (ただ一つ) 存在して，a を b に移す

記法は？

- 関数 $f\colon A \to B$
- 任意の $a \in A$ に対して，ある $b \in B$ が一意に存在して，$f(a) = b$

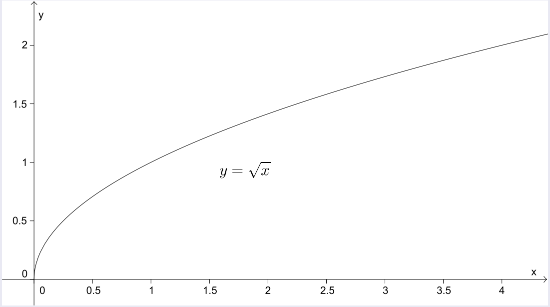
注：f によって a を移したものを $f(a)$ と書く

「関数」を「写像」とも呼ぶ

関数と言って思い浮かべるものは？ (1) 再掲

数学 (?) の「関数」

関数 $y = \sqrt{x}$



- $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$
- **すべての** $x \in [0, +\infty)$ **に対して** $f(x) = \sqrt{x}$

関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲

プログラミングの「関数」

```
int sum(int a, int b) {
  return a + b;
}
```

- $\mathtt{sum}\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- **すべての** $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **に対して** $\mathtt{sum}((a, b)) = a + b$

関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲 (続)

プログラミングの「関数」

```
int absolute_value(int a) {
  if (a < 0) {
    return -a;
  } else {
    return a;
  }
}
```

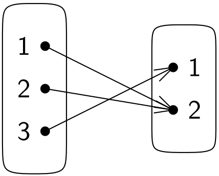
- absolute_value: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- **すべての** $a \in \mathbb{Z}$ **に対して**
  $a < 0$ **のとき** absolute_value$(a) = -a$
  そうでないとき absolute_value$(a) = a$

関数の例

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$
- **関数** $f : A \to B$ **を次のように定義**
  - $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$

$$f(1) = 2$$
$$f(2) = 2$$
$$f(3) = 1$$

$$A \xrightarrow{f} B$$



a	$f(a)$
1	2
2	2
3	1

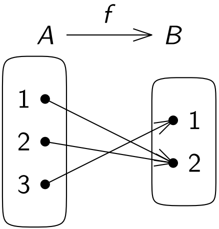
$$1 \overset{f}{\mapsto} 2$$
$$2 \overset{f}{\mapsto} 2$$
$$3 \overset{f}{\mapsto} 1$$

関数にまつわる記法と用語

集合 A, B **と関数** $f\colon A \to B$

- $A \xrightarrow{f} B$
- $b = f(a)$ **のとき「**$f\colon a \mapsto b$**」や「**$a \overset{f}{\mapsto} b$**」**
- $f(a)$ **を** a **における** f **の値という**
- A **を** f **の始域 (または定義域) という**
- B **を** f **の終域 という**

$$f(1) = 2$$
$$f(2) = 2$$
$$f(3) = 1$$



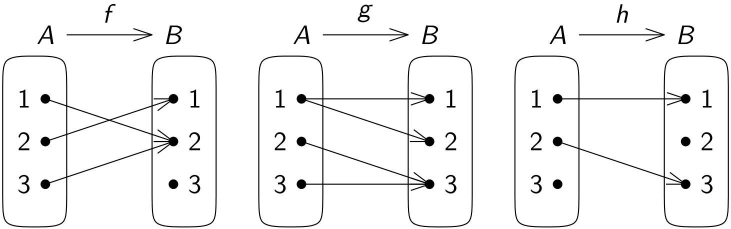
a	$f(a)$
1	2
2	2
3	1

$$1 \overset{f}{\mapsto} 2$$
$$2 \overset{f}{\mapsto} 2$$
$$3 \overset{f}{\mapsto} 1$$

格言

関数の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

問題：次の図の中で関数を表すものは？



2 つの関数が等しいということ

集合 A, B, C, D **と関数** $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$

f と g が等しいとは？

関数 f **と** g **が等しいことを「**$f = g$**」と書き，次の条件がすべて成り立つことと定義する**

- $A = C$ (f **と** g **の始域が等しい**)
- $B = D$ (f **と** g **の終域が等しい**)
- **すべての** $a \in A$ **に対して，**$f(a) = g(a)$ **(関数の値が等しい)**

恒等関数

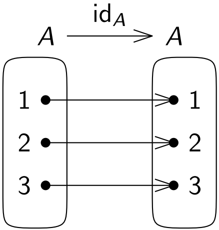
集合 A と関数 $f\colon A \to A$

恒等関数とは？

f が**恒等関数**であるとは，
任意の $a \in A$ に対して $a = f(a)$ であること

- $A \to A$ の恒等関数を id_A と書くこともある
- 例：$A = \{1, 2, 3\}$ のとき $f\colon A \to A$ で

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 3$$



目次

関数の像

$f\colon A \to B$ を関数とする

像とは？

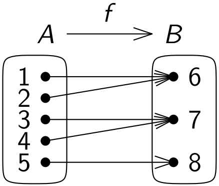
f による部分集合 $X \subseteq A$ の**像**を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ，ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

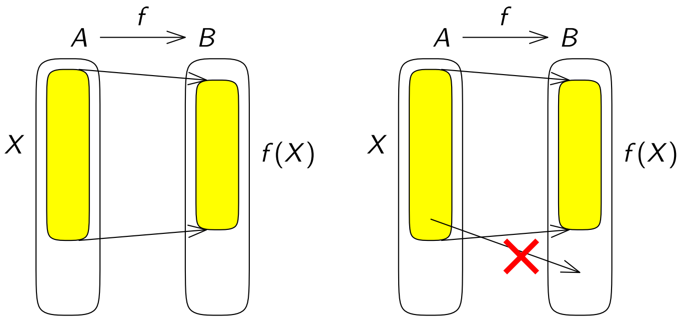
- X は A の**部分集合** (A の要素ではない)
- $f(X)$ は B の部分集合

例



- $f(\{1,2\}) = \{6\}$
- $f(\{1,2,3\}) = \{6,7\}$
- $f(\{1,2,3,4\}) = \{6,7\}$
- $f(\{1,2,3,4,5\}) = \{6,7,8\}$
- $f(\{2\}) = \{6\}$

関数の像：図による直観



関数の逆像

$f\colon A \to B$ を関数とする

逆像とは？

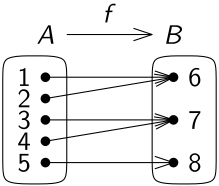
f による部分集合 $Y \subseteq B$ の**逆像** (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ，ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

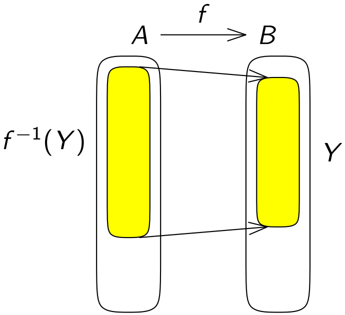
- Y は B の**部分集合** (B の要素ではない)
- $f^{-1}(Y)$ は A の部分集合

例



- $f^{-1}(\{6\}) = \{1, 2\}$
- $f^{-1}(\{6, 7\}) = \{1, 2, 3, 4\}$
- $f^{-1}(\{6, 7, 8\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $f^{-1}(\{7, 8\}) = \{3, 4, 5\}$
- $f^{-1}(\{6, 8\}) = \{1, 2, 5\}$

関数の逆像：図による直観



目次

関数の合成

集合 A, B, C と関数 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$

関数の合成とは？

関数 f と g の合成を $g \circ f\colon A \to C$ と表記し，任意の $x \in A$ に対して

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

とすることで定義する

注意：f の終域と g の始域が同じでないといけない
(同じでないときは合成を定義できない)

関数の合成：例

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$
- **関数** $f\colon A \to B$ **を次で定義**
  - $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$
- **関数** $g\colon B \to C$ **を次で定義**
  - $g(4) = 8$, $g(5) = 9$, $g(6) = 9$, $g(7) = 8$

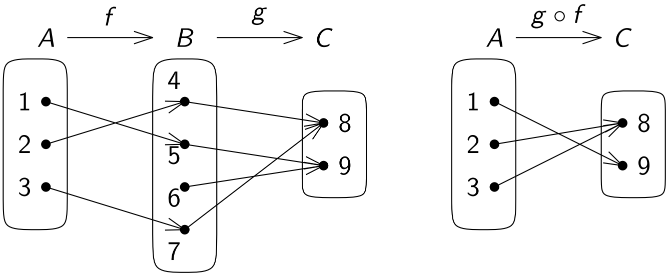
このとき， $g \circ f\colon A \to C$ **を考えると，**

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 8$$

関数の合成：例 (続)

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$
- **関数** $f : A \to B$ **を次で定義**
  - $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$
- **関数** $g : B \to C$ **を次で定義**
  - $g(4) = 8$, $g(5) = 9$, $g(6) = 9$, $g(7) = 8$

このとき， $g \circ f : A \to C$ **を考えると，**



目次

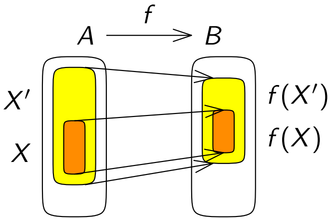
例題

次を証明したい

任意の集合 A, B**，任意の関数** $f\colon A \to B$**，任意の** $X, X' \subseteq A$ **に対して**

$$X \subseteq X' \text{ ならば } f(X) \subseteq f(X')$$

図による直観



部分集合の定義に基づいて書き直す

$$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X') \to \forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))$$

例題：表

使える性質	導く性質
$\forall\ x\ (x \in X \to x \in X')$	$\forall\ y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))$

例題：表の変更

導く性質に $\forall$ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall\ x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\ y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
	$y \in f(X) \to y \in f(X')$

例題：表の変更

導く性質に $\rightarrow$ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall\, x\ (x \in X \rightarrow x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')}$
	$y \in f(X')$

例題：証明の雛形

部分集合の定義から「任意の x に対して『$x \in X$ ならば $x \in X'$』」ならば,「任意の y に対して『$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$』」となることを証明すればよい.

任意の要素 y を選び, $y \in f(X)$ と仮定する.

ここで $y \in f(X')$ を結論として導く.

したがって, $y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる.

したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる. □

例題：表の変更

像の定義から
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists\, z \in X\ (y = f(z))$	$y \in f(X')$

例題：表の変更

像の定義から
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists\, z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
	$\exists\, z' \in X\ (y = f(z'))$

例題：証明の雛形の変更

部分集合の定義から「任意の x に対して『$x \in X$ ならば $x \in X'$』」ならば，「任意の y に対して『$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$』」となることを証明すればよい．

任意の要素 y を選び，$y \in f(X)$ と仮定する．

像の定義から，ある $z \in X$ が存在して $y = f(z)$ となる．
像の定義から，ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ となることを証明すればよい．

ここで「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$」を結論として導く．

したがって，$y \in f(X')$ となる．

したがって，$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる．

したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる． □

例題：表の変更

任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists\, z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
	$\exists\, z' \in X\ (y = f(z'))$

テンプレート：使える性質に ∃ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$\exists\, x \in D\ (P(x))$	○○○

変更後

$P(x_0)$ **が真となるような** $x_0 \in D$ **に対して**

使える性質	導く性質
$\exists\, x \in D\ (P(x))$	○○○
$P(x_0)$	
$x_0 \in D$	

ただし，x_0 は証明の中で既に登場した変数であってはいけない

この変更を存在例化と呼ぶこともある

テンプレート：使える性質に∃があるとき (証明の雛形)

$P(x_0)$ となる $x_0 \in D$ を考える．
ここで「○○○」を結論として導く．

例題：表の変更

使える性質に ∃ があるときのテンプレートから
任意の y に対して
$y = f(z_0)$ を満たす $z_0 \in X$ に対して

使える性質	導く性質
$\forall\, x\ (x \in X \rightarrow x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')}$
$\exists\, z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
$y = f(z_0)$	$\exists\, z' \in X'\ (y = f(z'))$
$z_0 \in X$	

例題：証明の雛形の変更

…

任意の要素 y を選び，$y \in f(X)$ と仮定する．

像の定義から，ある $z \in X$ が存在して $y = f(z)$ となる．
像の定義から，ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$ となることを証明すればよい．

$y = f(z_0)$ となる $z_0 \in X$ を考える．
ここで「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$」を結論として導く．

したがって，$y \in f(X')$ となる．

したがって，$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる．

したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる． □

例題：表の変更

使える性質に ∀ があるときのテンプレートから
任意の y に対して
$y = f(z_0)$ **を満たす** $z_0 \in X$ **に対して**

使える性質	導く性質
$\forall\, x\ (x \in X \rightarrow x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \rightarrow y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \rightarrow y \in f(X')}$
$\exists\, z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
$y = f(z_0)$	$\exists\, z' \in X'\ (y = f(z'))$
$z_0 \in X$	
$z_0 \in X \rightarrow z_0 \in X'$	

例題：表の変更

使える性質に $\to$ があるときのテンプレートから
任意の y に対して
$y = f(z_0)$ を満たす $z_0 \in X$ に対して

使える性質	導く性質
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists\, z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
$y = f(z_0)$	$\exists\, z' \in X'\ (y = f(z'))$
$z_0 \in X$	
$z_0 \in X \to z_0 \in X'$	
$z_0 \in X'$	

例題：証明の雛形

…

任意の要素 y を選び，$y \in f(X)$ と仮定する．

…

$y = f(z_0)$ となる $z_0 \in X$ を考える．
$z_0 \in X$ と「任意の x に対して『$x \in X$ ならば $x \in X'$』」から，
$z_0 \in X'$ となる．
ここで「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$」を結論として導く．

したがって，$y \in f(X')$ となる．

したがって，$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる．

したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる． $\square$

例題：表の変更

任意の y に対して
$y = f(z_0)$ **を満たす** $z_0 \in X$ **に対して**

使える性質	導く性質
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists\, z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
$y = f(z_0)$	$\exists\, z' \in X'\ (y = f(z'))$
$z_0 \in X$	
$z_0 \in X \to z_0 \in X'$	
$z_0 \in X'$	

テンプレート：導く性質に ∃ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
◯◯◯	$\exists\, x \in D\ (P(x))$
$x_0 \in D$	

変更後

構成した $x_0 \in D$ を考えると

使える性質	導く性質
◯◯◯	~~$\exists\, x \in D\ (P(x))$~~
$x_0 \in D$	$P(x_0)$

- これは**構成による証明**と呼ばれることもある
- 典型的には，$P(x_0)$ となる $x_0 \in D$ を自分で構成しないといけない

テンプレート：導く性質に ∃ があるとき (証明の雛形)

ここに自分で構成した $x_0 \in D$ の定義を書く．

ここで「$P(x_0)$」を結論として導く．

したがって，$\exists\, x \in D\ (P(x_0))$ が成立する．

例題：表の変更

導く性質に ∃ があるときのテンプレートから
任意の y に対して
$y = f(z_0)$ を満たす $z_0 \in X$ に対して
$z' = z_0$ とすると

使える性質	導く性質
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall\, y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists\, z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
$y = f(z_0)$	$\cancel{\exists\, z' \in X'\ (y = f(z'))}$
$z_0 \in X$	$y = f(z')$
$z_0 \in X \to z_0 \in X'$	
$z_0 \in X'$	

例題：表の変更

$z' = z_0$ なので
任意の y に対して
$y = f(z_0)$ を満たす $z_0 \in X$ に対して
$z' = z_0$ とすると

使える性質	導く性質
$\forall x\ (x \in X \to x \in X')$	$\cancel{\forall y\ (y \in f(X) \to y \in f(X'))}$
$y \in f(X)$	$\cancel{y \in f(X) \to y \in f(X')}$
$\exists z \in X\ (y = f(z))$	$\cancel{y \in f(X')}$
$y = f(z_0)$	$\cancel{\exists z' \in X'\ (y = f(z'))}$
$z_0 \in X$	$y = f(z')$
$z_0 \in X \to z_0 \in X'$	
$z_0 \in X'$	
$y = f(z')$	

例題：証明の雛形の変更

…

任意の要素 y を選び，$y \in f(X)$ と仮定する．

…

$y = f(z_0)$ となる $z_0 \in X$ を考える．
$z_0 \in X$ と「任意の x に対して『$x \in X$ ならば $x \in X'$』」から，
$z_0 \in X'$ となる．
$z_0 \in X'$ なので，$z' = z_0$ とすると，$y = f(z')$ となる．
したがって，「ある $z' \in X'$ が存在して $y = f(z')$」となる．

したがって，$y \in f(X')$ となる．

したがって，$y \in f(X)$ ならば $y \in f(X')$ となる．

したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ となる． □

目次

今日のまとめ

関数とそれにまつわる概念

- 関数 (写像) の定義と記法
- 関数の像と逆像，関数の合成

証明の作り方

- ∃ が関係する場合のテンプレート
- 構成による証明

余談：「関数」という用語

『数学の言葉づかい 100』(日本評論社，1999 年) 58 ページより

関数の用語 functio **は** 17 **世紀末ライプニッツにより初めて用いられた．**

(中略)

関数がよく f **で表されるのはこれにちなむもので，各国語でもこのラテン語の直訳として** function, Funktion, fonction, **(中略) などが用いられている．わが国へは中国で音訳された函數が輸入され，現在では代用漢字による関数があてられて，初等教育の段階でほぼ定着した．**

目次