離散数学 第 3 回
論理 (2)：述語論理

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 5 月 1 日

最終更新：2012 年 5 月 9 日　00:31

概要

今日の目標

- 述語論理の基本を理解すること
- 「同値変形による恒真性の証明」ができるようになること

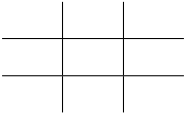
第 1 回 (命題論理) の内容をしっかりと復習

目次

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

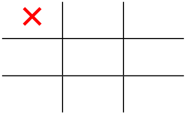
- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)



三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

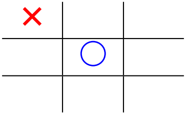
- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)



三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

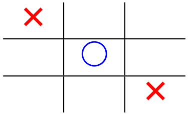
- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「◯」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
(どちらも揃えられないときは，引き分け)



三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

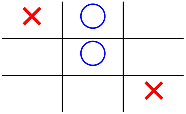
- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)



三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)



三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	
	○	
	×	×

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	
	○	
○	×	×

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	×
	○	
○	×	×

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
  (どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	×
	○	○
○	×	×

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既にに書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
(どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	×
×	○	○
○	×	×

三目並べ

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- 縦か横か斜めのどこかに自分の印を先に揃えた方が勝ち
(どちらも揃えられないときは，引き分け)

×	○	×
×	○	○
○	×	×

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」や「後手が必ず勝てる」という命題をどのように書いたらよいか？

後出しジャンケン

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

後出しジャンケン

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

後出しジャンケン

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

後出しジャンケン

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題を
どのように書いたらよいか？

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

目次

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：「5 は素数である」 真

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：「5 は素数である」 真
- $n = 6$：「6 は素数である」 偽

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：「5 は素数である」 真
- $n = 6$：「6 は素数である」 偽
- $n = 7$：「7 は素数である」 真

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：「5 は素数である」 真
- $n = 6$：「6 は素数である」 偽
- $n = 7$：「7 は素数である」 真
- $n = 8$：「8 は素数である」 偽

次の文の真偽は？

この文は真か偽か？

n は素数である

真偽は n の具体的な値によって異なる

- $n = 2$：「2 は素数である」 真
- $n = 3$：「3 は素数である」 真
- $n = 4$：「4 は素数である」 偽
- $n = 5$：「5 は素数である」 真
- $n = 6$：「6 は素数である」 偽
- $n = 7$：「7 は素数である」 真
- $n = 8$：「8 は素数である」 偽
- $\cdots$

命題関数

命題関数とは？（常識に基づく定義）

命題関数とは，変数を具体的な値に定めると真偽が定まる文

例：$P(n) =$「n は素数である」　　(ただし，$n \in \mathbb{N}$ (n は自然数))

命題関数

命題関数とは？（常識に基づく定義）

命題関数とは，変数を具体的な値に定めると真偽が定まる文

例：$P(n) =$「n は素数である」　　(ただし，$n \in \mathbb{N}$ (n は自然数))

- $n = 2$：$P(2) =$「2 は素数である」　　真

命題関数

命題関数とは？（常識に基づく定義）

命題関数とは，変数を具体的な値に定めると真偽が定まる文

例：$P(n) =$「n は素数である」　（ただし，$n \in \mathbb{N}$（n は自然数））

- $n = 2$：$P(2) =$「2 は素数である」　真
- $n = 3$：$P(3) =$「3 は素数である」　真
- $n = 4$：$P(4) =$「4 は素数である」　偽
- $n = 5$：$P(5) =$「5 は素数である」　真
- $n = 6$：$P(6) =$「6 は素数である」　偽
- $n = 7$：$P(7) =$「7 は素数である」　真
- $n = 8$：$P(8) =$「8 は素数である」　偽
- $\cdots$

命題関数：別の例

$Q(x, y) =$「$x + y = 6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数)）

命題関数：別の例

$Q(x, y) =$「$x + y = 6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数))

- $x = 2$, $y = 4$： $Q(2, 4) =$ 「$2 + 4 = 6$ である」 真

命題関数：別の例

$Q(x, y) =$「$x + y = 6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数))

- $x = 2$, $y = 4$： $Q(2, 4) =$ 「$2 + 4 = 6$ である」 真
- $x = 8$, $y = -2$： $Q(8, -2) =$ 「$8 + (-2) = 6$ である」 真

命題関数：別の例

$Q(x,y) =$「$x + y = 6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数)）

- $x = 2$, $y = 4$： $Q(2,4) =$ 「$2 + 4 = 6$ である」 真
- $x = 8$, $y = -2$： $Q(8,-2) =$ 「$8 + (-2) = 6$ である」 真
- $x = 5$, $y = 9$： $Q(5,9) =$ 「$5 + 9 = 6$ である」 偽

命題関数：別の例

$Q(x, y) =$ 「$x + y = 6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数)）

- $x = 2,\ y = 4$： $Q(2, 4) =$ 「$2 + 4 = 6$ である」 真
- $x = 8,\ y = -2$： $Q(8, -2) =$ 「$8 + (-2) = 6$ である」 真
- $x = 5,\ y = 9$： $Q(5, 9) =$ 「$5 + 9 = 6$ である」 偽
- $x = \frac{21}{4},\ y = \frac{3}{4}$： $Q(\frac{21}{4}, \frac{3}{4}) =$ 「$\frac{21}{4} + \frac{3}{4} = 6$ である」 真

命題関数：別の例

$Q(x, y) =$「$x + y = 6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数)）

- $x = 2,\ y = 4$： $Q(2, 4) =$ 「$2 + 4 = 6$ である」 真
- $x = 8,\ y = -2$： $Q(8, -2) =$ 「$8 + (-2) = 6$ である」 真
- $x = 5,\ y = 9$： $Q(5, 9) =$ 「$5 + 9 = 6$ である」 偽
- $x = \frac{21}{4},\ y = \frac{3}{4}$： $Q(\frac{21}{4}, \frac{3}{4}) =$ 「$\frac{21}{4} + \frac{3}{4} = 6$ である」 真
- $x = 0,\ y = 6$： $Q(0, 6) =$ 「$0 + 6 = 6$ である」 真

命題関数：別の例

$Q(x,y) =$「$x+y=6$ である」（ただし，$x \in \mathbb{R}$ かつ $y \in \mathbb{R}$ (x, y は実数)）

- $x=2$, $y=4$：　$Q(2,4) =$「$2+4=6$ である」　真
- $x=8$, $y=-2$：　$Q(8,-2) =$「$8+(-2)=6$ である」　真
- $x=5$, $y=9$：　$Q(5,9) =$「$5+9=6$ である」　偽
- $x=\frac{21}{4}$, $y=\frac{3}{4}$：　$Q(\frac{21}{4},\frac{3}{4}) =$「$\frac{21}{4}+\frac{3}{4}=6$ である」　真
- $x=0$, $y=6$：　$Q(0,6) =$「$0+6=6$ である」　真
- $x=-4.5$, $y=9.2$：　$Q(-4.5,9.2) =$「$(-4.5)+9.2=6$ である」偽
- $\cdots$

命題関数：別の例 (2)

$R(x,y) =$「x 県の県庁は y 市にある」 (ただし，x は県名，y は市名))

- $x =$ 石川, $y =$ 金沢：$R($石川, 金沢$) =$「石川県の県庁は金沢市にある」
- $x =$ 埼玉, $y =$ 浦和：$R($埼玉, 浦和$) =$「埼玉県の県庁は浦和市にある」
- $x =$ 群馬, $y =$ 高崎：$R($群馬, 高崎$) =$「群馬県の県庁は高崎市にある」
- $x =$ 広島, $y =$ 広島：$R($広島, 広島$) =$「広島県の県庁は広島市にある」
- $x =$ 静岡, $y =$ 静岡：$R($静岡, 静岡$) =$「静岡県の県庁は静岡市にある」
- $x =$ 長野, $y =$ 松本：$R($長野, 松本$) =$「長野県の県庁は松本市にある」
- $x =$ 茨城, $y =$ 茨木：$R($茨城, 茨木$) =$「茨城県の県庁は茨木市にある」
- $x =$ 愛媛, $y =$ 松山：$R($愛媛, 松山$) =$「愛媛県の県庁は松山市にある」
- $\cdots$

命題関数：別の例 (2)

$R(x,y) =$「x 県の県庁は y 市にある」 (ただし，x は県名，y は市名))

- $x =$ 石川, $y =$ 金沢：$R($石川, 金沢$) =$「石川県の県庁は金沢市にある」 真
- $x =$ 埼玉, $y =$ 浦和：$R($埼玉, 浦和$) =$「埼玉県の県庁は浦和市にある」 偽
- $x =$ 群馬, $y =$ 高崎：$R($群馬, 高崎$) =$「群馬県の県庁は高崎市にある」 偽
- $x =$ 広島, $y =$ 広島：$R($広島, 広島$) =$「広島県の県庁は広島市にある」 真
- $x =$ 静岡, $y =$ 静岡：$R($静岡, 静岡$) =$「静岡県の県庁は静岡市にある」 真
- $x =$ 長野, $y =$ 松本：$R($長野, 松本$) =$「長野県の県庁は松本市にある」 偽
- $x =$ 茨城, $y =$ 茨木：$R($茨城, 茨木$) =$「茨城県の県庁は茨木市にある」 偽
- $x =$ 愛媛, $y =$ 松山：$R($愛媛, 松山$) =$「愛媛県の県庁は松山市にある」 真
- $\cdots$

目次

かつかつかつかつかつかつかつかつ

次のような命題関数を考える

$P(x) =$「x は男である」

- 「徳川家康は男であり，かつ，徳川吉宗は男である」という命題は

$$P(\text{徳川家康}) \wedge P(\text{徳川吉宗})$$

と書ける

かつかつかつかつかつかつかつかつ

次のような命題関数を考える

$P(x) =$ 「x は男である」

- 「徳川家康は男であり，かつ，徳川吉宗は男である」という命題は

$$P(\text{徳川家康}) \wedge P(\text{徳川吉宗})$$

と書ける

- 「徳川将軍は全員男である」という命題は

$$P(\text{徳川家康}) \wedge P(\text{徳川秀忠}) \wedge P(\text{徳川家光}) \wedge P(\text{徳川家綱}) \wedge P(\text{徳川綱吉}) \wedge P(\text{徳川家宣}) \wedge P(\text{徳川家継}) \wedge P(\text{徳川吉宗}) \wedge P(\text{徳川家重}) \wedge P(\text{徳川家治}) \wedge P(\text{徳川家斉}) \wedge P(\text{徳川家慶}) \wedge P(\text{徳川家定}) \wedge P(\text{徳川家茂}) \wedge P(\text{徳川慶喜})$$

と書ける (が，書きたくない)

全称記号

先ほどの書きたくない命題は次のようにも書く

$$\forall\, x \in T\ (P(x))$$

ただし，T は徳川将軍全員からなる集合

$$\begin{aligned} T &= \{\,\text{徳川家康}, \text{徳川秀忠}, \text{徳川家光}, \text{徳川家綱}, \text{徳川綱吉}, \\ &\quad\ \ \text{徳川家宣}, \text{徳川家継}, \text{徳川吉宗}, \text{徳川家重}, \text{徳川家治}, \\ &\quad\ \ \text{徳川家斉}, \text{徳川家慶}, \text{徳川家定}, \text{徳川家茂}, \text{徳川慶喜}\,\} \end{aligned}$$

- これは「すべての $x \in T$ に対して $P(x)$」という意味
- 「任意の $x \in T$ に対して $P(x)$」とも読む

- 「$\forall$」は全称記号と呼ばれる
- 「$\forall$」を使うことの意義
  - 「$\wedge$」を並べれば書けるが，それが面倒であるとき有効
  - 「$\wedge$」を並べて書けなくても「$\wedge$」を並べた意味を表現でき有効

全称記号：別の例

1. 「すべての自然数 n に対して，$2n+1$ は奇数である」という命題

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ (2n+1 \text{ は奇数である})$$

2. 「すべての実数 x に対して，x^2 は非負である」という命題

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 0)$$

3. 「すべての実数 x に対して，$x \geq 1$ ならば $\frac{1}{x} \leq 1$」という命題

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ((x \geq 1) \to (\frac{1}{x} \leq 1))$$

またはまたはまたはまたはまたはまたはまたはまたは

次のような命題関数を考える

$Q(x) =$「x は 70 年以上生きた」

- 「徳川家康は 70 年以上生きたか，または，徳川吉宗は 70 年以上生きた」という命題は

$$Q(\text{徳川家康}) \vee Q(\text{徳川吉宗})$$

と書ける

またはまたはまたはまたはまたはまたはまたはまたは

次のような命題関数を考える

$Q(x) =$「x は 70 年以上生きた」

- 「徳川家康は 70 年以上生きたか，または，徳川吉宗は 70 年以上生きた」という命題は

$$Q(\text{徳川家康}) \vee Q(\text{徳川吉宗})$$

  と書ける

- 「徳川将軍の誰かは 70 年以上生きた」という命題は

$$Q(\text{徳川家康}) \vee Q(\text{徳川秀忠}) \vee Q(\text{徳川家光}) \vee Q(\text{徳川家綱}) \vee Q(\text{徳川綱吉}) \vee Q(\text{徳川家宣}) \vee Q(\text{徳川家継}) \vee Q(\text{徳川吉宗}) \vee Q(\text{徳川家重}) \vee Q(\text{徳川家治}) \vee Q(\text{徳川家斉}) \vee Q(\text{徳川家慶}) \vee Q(\text{徳川家定}) \vee Q(\text{徳川家茂}) \vee Q(\text{徳川慶喜})$$

  と書ける (が，書きたくない)

存在記号

先ほどの書きたくない命題は次のようにも書く

$$\exists\, x \in T\ (Q(x))$$

ただし，T は徳川将軍全員からなる集合

$$\begin{aligned} T \quad = \quad \{ & \text{徳川家康}, \text{徳川秀忠}, \text{徳川家光}, \text{徳川家綱}, \text{徳川綱吉}, \\ & \text{徳川家宣}, \text{徳川家継}, \text{徳川吉宗}, \text{徳川家重}, \text{徳川家治}, \\ & \text{徳川家斉}, \text{徳川家慶}, \text{徳川家定}, \text{徳川家茂}, \text{徳川慶喜} \} \end{aligned}$$

- これは「ある $x \in T$ に対して $Q(x)$」という意味
- 「ある $x \in T$ が存在して $Q(x)$」とも読む

- 「∃」は存在記号と呼ばれる
- 「∃」を使うことの意義
  - 「∨」を並べれば書けるが，それが面倒であるとき有効
  - 「∨」を並べて書けなくても「∨」を並べた意味を表現でき有効

存在記号：別の例

1. 「ある自然数 n に対して，$2n^2 - 1$ は素数である」という命題

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\ (2n^2 - 1\ \text{は素数である})$$

2. 「ある実数 x に対して，x^2 は非正である」という命題

$$\exists\, x \in \mathbb{R}\ (x^2 \leq 0)$$

3. 「ある実数 x に対して，$x > 1$ ならば $x = 0$」という命題

$$\exists\, x \in \mathbb{R}\ ((x > 1) \rightarrow (x = 0))$$

全称命題と存在命題

一般的な記法

- 考える命題関数 $P(x)$ の変数 x が動く範囲を集合 D として定める (この集合を**議論領域**と呼ぶことがある)
- 「D のすべての要素 x に対して $P(x)$ となる」という命題を

$$\forall\, x \in D\ (P(x))$$

  と表記する (この形の命題を**全称命題**と呼ぶ)
- 「D のある要素 x に対して $P(x)$ となる」という命題を

$$\exists\, x \in D\ (P(x))$$

  と表記する (この形の命題を**存在命題**と呼ぶ)

「$\forall\, x \in D\ \ P(x)$」,「$\forall\, x \in D : P(x)$」と書くこともある ($\exists$ も同様)

注意：全称命題も存在命題も真偽が (だいたい) 定まる

全称命題の真理値：考え方

$D = \{a, b, c\}$ のとき

「$\forall x \in D \ (P(x))$」は「$P(a) \land P(b) \land P(c)$」と同値

$P(a)$	$P(b)$	$P(c)$	$P(a) \land P(b) \land P(c)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

全称命題の真理値

全称命題「$\forall\ x \in D\ (P(x))$」の真理値

- これが T であるのは，すべての $x \in D$ に対して $P(x)$ が T であるとき
- これが F であるのは，ある $x \in D$ に対して $P(x)$ が F であるとき

- 標語的に書くと (混乱するかもしれないけど)

$$\boxed{(\forall\ x \in D\ (P(x))) = \mathrm{T}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\forall\ x \in D\ (P(x) = \mathrm{T})}$$

$$\boxed{(\forall\ x \in D\ (P(x))) = \mathrm{F}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\exists\ x \in D\ (P(x) = \mathrm{F})}$$

- 便宜上，$D = \emptyset$ のときは常に

$$(\forall\ x \in \emptyset\ (P(x))) = \mathrm{T}$$

とする

先ほどの例：全称命題

- $P(x) =$「x は男である」，T は徳川将軍全員からなる集合として
$$\forall\, x \in T\ (P(x))$$
を考える
- この論理式は「真」(徳川将軍は全員男)

備忘録：

$$\begin{aligned} T \quad = \quad \{ & \text{徳川家康}, \text{徳川秀忠}, \text{徳川家光}, \text{徳川家綱}, \text{徳川綱吉}, \\ & \text{徳川家宣}, \text{徳川家継}, \text{徳川吉宗}, \text{徳川家重}, \text{徳川家治}, \\ & \text{徳川家斉}, \text{徳川家慶}, \text{徳川家定}, \text{徳川家茂}, \text{徳川慶喜} \} \end{aligned}$$

存在命題の真理値：考え方

$D = \{a, b, c\}$ のとき

「$\exists\, x \in D\ (P(x))$」は「$P(a) \vee P(b) \vee P(c)$」と同値

$P(a)$	$P(b)$	$P(c)$	$P(a) \vee P(b) \vee P(c)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

存在命題の真理値

存在命題「$\exists\, x \in D\ (P(x))$」の真理値

- これが T であるのは，ある $x \in D$ に対して $P(x)$ が T であるとき
- これが F であるのは，すべての $x \in D$ に対して $P(x)$ が F であるとき

- 標語的に書くと (混乱するかもしれないけど)

$$\boxed{(\exists\, x \in D\ (P(x))) = \mathrm{T}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\exists\, x \in D\ (P(x) = \mathrm{T})}$$

$$\boxed{(\exists\, x \in D\ (P(x))) = \mathrm{F}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\forall\, x \in D\ (P(x) = \mathrm{F})}$$

- 便宜上，$D = \emptyset$ のときは常に

$$(\exists\, x \in \emptyset\ (P(x))) = \mathrm{F}$$

とする

先ほどの例：存在命題

- $Q(x) =$「x は 70 年以上生きた」，T は徳川将軍全員からなる集合として
$$\exists\, x \in T\ (Q(x))$$
を考える
- この論理式は「真」 (徳川家康と徳川慶喜は 70 年以上生きた)

備忘録：

$$\begin{aligned} T \quad = \quad \{ & \text{徳川家康}, \text{徳川秀忠}, \text{徳川家光}, \text{徳川家綱}, \text{徳川綱吉}, \\ & \text{徳川家宣}, \text{徳川家継}, \text{徳川吉宗}, \text{徳川家重}, \text{徳川家治}, \\ & \text{徳川家斉}, \text{徳川家慶}, \text{徳川家定}, \text{徳川家茂}, \text{徳川慶喜}\ \} \end{aligned}$$

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする

- $\forall\, n \in A$ (n は自然数である) 真

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする

- $\forall\, n \in A$ (n は自然数である) 真
- $\forall\, n \in A$ (n は偶数である) 偽

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする

- $\forall\, n \in A$ (n は自然数である) 真
- $\forall\, n \in A$ (n は偶数である) 偽
- $\exists\, n \in A$ (n は偶数である) 真

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **とする**

- $\forall\ n \in A$ (n **は自然数である**) **真**
- $\forall\ n \in A$ (n **は偶数である**) **偽**
- $\exists\ n \in A$ (n **は偶数である**) **真**
- $\exists\ n \in A$ (n **は自然数である**) **真**

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする

- $\forall\, n \in A$ (n は自然数である) 真
- $\forall\, n \in A$ (n は偶数である) 偽
- $\exists\, n \in A$ (n は偶数である) 真
- $\exists\, n \in A$ (n は自然数である) 真
- $\exists\, n \in A$ (n は素数である) 真

別の例

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする

- $\forall\, n \in A$ (n は自然数である) 真
- $\forall\, n \in A$ (n は偶数である) 偽
- $\exists\, n \in A$ (n は偶数である) 真
- $\exists\, n \in A$ (n は自然数である) 真
- $\exists\, n \in A$ (n は素数である) 真
- $\exists\, n \in A$ (n は負の数である) 偽

命題関数に現れる変数が増えると…

次のような文の真偽は？

- すべての自然数 n に対して，$m+n$ は偶数である．
- ある自然数 n が存在して，$m+n$ は偶数である．

これらの文の真偽は m が何であるかに依存する（「命題」ではない）

$P(m,n) =$「$m+n$ は偶数である」とすると

これらの文は次のように書ける

- $\forall\, n \in \mathbb{N}\ (P(m,n))$
- $\exists\, n \in \mathbb{N}\ (P(m,n))$

自由変数と束縛変数

先ほどの例

- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$
- $\exists\ n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$

これらの文において

- m **は自由変数 (対応する全称記号，存在記号が出てこない)**
- n **は束縛変数 (対応する全称記号，存在記号が出てくる)**

自由変数がない場合，その文の真偽は (だいたい) 定まる

自由変数と束縛変数

先ほどの例

- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$
- $\exists\ n \in \mathbb{N}\ (P(m, n))$

これらの文において

- m **は自由変数 (対応する全称記号，存在記号が出てこない)**
- n **は束縛変数 (対応する全称記号，存在記号が出てくる)**

自由変数がない場合，その文の真偽は (だいたい) 定まる

述語論理式

述語論理式とは？（常識に基づく定義）

述語論理式とは，

- 命題関数，
- 命題の演算 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，
- 全称記号 $\forall$，存在記号 $\exists$ (とそれに伴う「$x \in D$」のような記法)

を意味を成すように組み合わせたもの

述語論理式の例：D を議論領域，$P(x, y)$，$Q(x, y, z)$ を命題関数として

- $\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x, y) \rightarrow \forall\ z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$

閉論理式と開論理式とは？

- **閉論理式**：自由変数を持たない述語論理式　(真偽は (だいたい) 定まる)
- **開論理式**：自由変数を持つ述語論理式　(真偽は定まらない)

次の閉論理式の真偽は？

次の閉論理式の真偽は？

1. $\forall\, m \in \mathbb{N}\ (\forall\, n \in \mathbb{N}\ (m + n$ は偶数である$))$
2. $\exists\, m \in \mathbb{N}\ (\forall\, n \in \mathbb{N}\ (m + n$ は偶数である$))$
3. $\forall\, m \in \mathbb{N}\ (\exists\, n \in \mathbb{N}\ (m + n$ は偶数である$))$
4. $\exists\, m \in \mathbb{N}\ (\exists\, n \in \mathbb{N}\ (m + n$ は偶数である$))$

いきなり考えるのは難しいので

$\mathbb{N}$ ではなく有限集合の場合を考える

$\mathbb{N}$ の場合の証明は次回考える

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン

次の閉論理式の真偽は？

1. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
2. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
3. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
4. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$

復習

「$\forall$」は「$\wedge$」みたいで,「$\exists$」は「$\vee$」みたい

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (1)

次の 3 つは同値

- $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (1)

次の 3 つは同値

- $\forall\ m \in \{1, 2\}\ (\forall\ n \in \{1, 2\}\ (m + n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\ m \in \{1, 2\}\ ($「$m + 1$ **は偶数である**」$\wedge$「$m + 2$ **は偶数である**」$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (1)

次の 3 つは同値

- $\forall\ m \in \{1, 2\}\ (\forall\ n \in \{1, 2\}\ (m + n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\ m \in \{1, 2\}\ ($**「**$m + 1$ **は偶数である」**$\wedge$ **「**$m + 2$ **は偶数である」**$)$
- $($**「**$1 + 1$ **は偶数である」**$\wedge$ **「**$1 + 2$ **は偶数である」**$) \wedge$
  $($**「**$2 + 1$ **は偶数である」**$\wedge$ **「**$2 + 2$ **は偶数である」**$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (1)

次の 3 つは同値

- $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\ m \in \{1,2\}$ (「$m+1$ **は偶数である**」$\wedge$「$m+2$ **は偶数である**」)
- (「$1+1$ **は偶数である**」$\wedge$「$1+2$ **は偶数である**」) $\wedge$ (「$2+1$ **は偶数である**」$\wedge$「$2+2$ **は偶数である**」)

- **これは**「$(\mathrm{T} \wedge \mathrm{F}) \wedge (\mathrm{F} \wedge \mathrm{T})$」
- **つまり，これは** F (**偽**)

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (2)

次の 3 つは同値

- $\exists\, m \in \{1, 2\}\ (\forall\, n \in \{1, 2\}\ (m + n$ **は偶数である**$))$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (2)

次の 3 つは同値

- $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\exists\ m \in \{1,2\}\ ($「$m+1$ **は偶数である**」$\wedge$「$m+2$ **は偶数である**」$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (2)

次の 3 つは同値

- $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\exists\ m \in \{1,2\}$ (**「**$m+1$ **は偶数である」**$\wedge$ **「**$m+2$ **は偶数である」**)
- (**「**$1+1$ **は偶数である」**$\wedge$ **「**$1+2$ **は偶数である」**) $\vee$
  (**「**$2+1$ **は偶数である」**$\wedge$ **「**$2+2$ **は偶数である」**)

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (2)

次の 3 つは同値

- $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\exists\ m \in \{1,2\}$ (「$m+1$ **は偶数である**」$\wedge$「$m+2$ **は偶数である**」)
- (「$1+1$ **は偶数である**」$\wedge$「$1+2$ **は偶数である**」) $\vee$
  (「$2+1$ **は偶数である**」$\wedge$「$2+2$ **は偶数である**」)

- **これは**「$(\mathrm{T} \wedge \mathrm{F}) \vee (\mathrm{F} \wedge \mathrm{T})$」
- **つまり，これは** F (**偽**)

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (3)

次の 3 つは同値

- $\forall\, m \in \{1, 2\}\ (\exists\, n \in \{1, 2\}\ (m + n$ **は偶数である**$))$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (3)

次の 3 つは同値

- $\forall\ m \in \{1, 2\}\ (\exists\ n \in \{1, 2\}\ (m + n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\ m \in \{1, 2\}\ ($「$m + 1$ **は偶数である**」$\lor$「$m + 2$ **は偶数である**」$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (3)

次の 3 つは同値

- $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\ m \in \{1,2\}\ ($**「**$m+1$ **は偶数である」**$\vee$ **「**$m+2$ **は偶数である」**$)$
- $($**「**$1+1$ **は偶数である」**$\vee$ **「**$1+2$ **は偶数である」**$) \wedge$
  $($**「**$2+1$ **は偶数である」**$\vee$ **「**$2+2$ **は偶数である」**$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (3)

次の 3 つは同値

- $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\forall\ m \in \{1,2\}$ (「$m+1$ **は偶数である**」$\vee$「$m+2$ **は偶数である**」)
- (「$1+1$ **は偶数である**」$\vee$「$1+2$ **は偶数である**」) $\wedge$ (「$2+1$ **は偶数である**」$\vee$「$2+2$ **は偶数である**」)

- **これは**「$(\mathrm{T} \vee \mathrm{F}) \wedge (\mathrm{F} \vee \mathrm{T})$」
- **つまり，これは** T (**真**)

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (4)

次の 3 つは同値

- $\exists\, m \in \{1,2\}\ (\exists\, n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (4)

次の 3 つは同値

- $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\exists\ m \in \{1,2\}\ ($「$m+1$ **は偶数である**」$\vee$「$m+2$ **は偶数である**」$)$

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (4)

次の 3 つは同値

- $\exists\, m \in \{1,2\}$ ($\exists\, n \in \{1,2\}$ ($m+n$ **は偶数である**))
- $\exists\, m \in \{1,2\}$ (**「**$m+1$ **は偶数である」** $\vee$ **「**$m+2$ **は偶数である」**)
- (**「**$1+1$ **は偶数である」** $\vee$ **「**$1+2$ **は偶数である」**) $\vee$
  (**「**$2+1$ **は偶数である」** $\vee$ **「**$2+2$ **は偶数である」**)

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン (4)

次の 3 つは同値

- $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$
- $\exists\ m \in \{1,2\}$ (「$m+1$ **は偶数である**」$\vee$「$m+2$ **は偶数である**」)
- (「$1+1$ **は偶数である**」$\vee$「$1+2$ **は偶数である**」) $\vee$
  (「$2+1$ **は偶数である**」$\vee$「$2+2$ **は偶数である**」)

- **これは**「$(\mathrm{T} \vee \mathrm{F}) \vee (\mathrm{F} \vee \mathrm{T})$」
- **つまり，これは** T (**真**)

次の閉論理式の真偽は？ 有限バージョン：まとめ

次の閉論理式の真偽は？

1. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$ **偽**
2. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$ **偽**
3. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$ **真**
4. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ **は偶数である**$))$ **真**

復習

「$\forall$」は「$\wedge$」みたいで,「$\exists$」は「$\vee$」みたい

無限バージョンの真偽は次回以降 (のつもり)

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x, y) \to \forall\ z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x, y) \to \forall\ z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\, x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\, x \in D\ (Q(x)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\, x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\, x \in D\ (Q(x)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\, x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\, x \in D\ (Q(x)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \to \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\, x \in D\ (P(x))) \lor (\forall\, x \in D\ (Q(x)))$
- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x) \land Q(y, z)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\, x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y) \rightarrow \forall\, z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\, x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\, x \in D\ (Q(x)))$
- $\forall\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x) \wedge Q(y, z)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x, y) \to \forall\ z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\ x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\ x \in D\ (Q(x)))$
- $\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x) \wedge Q(y, z)))$

変数のスコープ (作用域)

変数のスコープ

- 「$\forall\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ
- 「$\exists\ x \in D\ (\cdots)$」の「$(\cdots)$」が x のスコープ

例

- $\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x, y) \to \forall\ z \in D\ (\neg Q(x, y, z))))$
- $(\forall\ x \in D\ (P(x))) \vee (\forall\ x \in D\ (Q(x)))$
- $\forall\ x \in D\ (\exists\ y \in D\ (P(x) \wedge Q(y, z)))$ (注：これは開論理式)

全称命題と存在命題：注意

注意

議論領域 D が明らかなときは,「$\in D$」を省いて書くこともある
つまり

- 全称命題は
$$\forall\, x\ (P(x))$$
- 存在命題は
$$\exists\, x\ (P(x))$$

と表記する

目次

後出しジャンケン (再掲)

- ジャンケンで相手が出した手を見てから，自分の手が出せるとする
- 必ず勝てる

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題を
どのように書いたらよいか？

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

後出しジャンケン：述語論理の視点から

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題を
どのように書いたらよいか？

$H = \{$ グー, チョキ, パー $\}$ とすると

画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

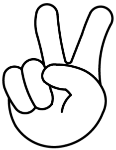
後出しジャンケン：述語論理の視点から

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題をどのように書いたらよいか？

$H = \{$ **グー**, **チョキ**, **パー** $\}$ **とすると**

$$\forall x \in H \; (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$



画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

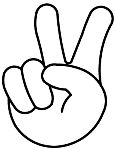
後出しジャンケン：述語論理の視点から

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題をどのように書いたらよいか？

$H = \{$ **グー**, **チョキ**, **パー** $\}$ **とすると**

$$\forall\, x \in H\ (\exists\, y \in H\ (\qquad\qquad\qquad))$$



画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

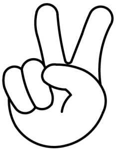
後出しジャンケン：述語論理の視点から

質問

後出しジャンケンで「自分が必ず勝てる」という命題をどのように書いたらよいか？

$H = \{$ グー, チョキ, パー $\}$ とすると

$$\forall\, x \in H\ (\exists\, y \in H\ (y \text{ は } x \text{ に勝つ}))$$



画像 http://www.nikoli.com/blog/juno/index.php?id=08070002

三目並べ (ちょっとルール変更)

3×3 のマス目の上で行うゲーム

- 先手は「×」をマス目に書く
- 後手は「○」をマス目に書く
- 先手と後手は交互に書くが，既に書かれているマス目には書けない
- マス目が全部埋まったときに，先手は一列揃えたい
- それができれば先手の勝ち，できなければ後手の勝ち

×	○	×
×	○	○
○	×	×

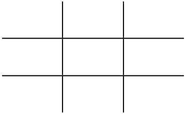
質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」や「後手が必ず勝てる」という命題をどのように書いたらよいか？

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

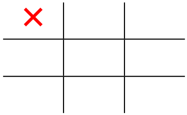


三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$\exists a(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$

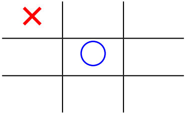


三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\qquad\qquad))$$

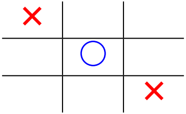


三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\qquad)))$$

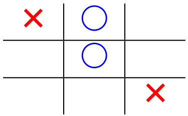


三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\qquad\qquad))))$$



三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\qquad)))))$$

×	○	
	○	
	×	×

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\forall f(\qquad))))))$$

×	○	
	○	
○	×	×

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\forall f(\exists g(\qquad\qquad)))))))$$

×	○	×
	○	
○	×	×

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\forall f(\exists g(\forall h(\qquad\qquad))))))))$$

×	○	×
	○	○
○	×	×

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\forall f(\exists g(\forall h(\exists i(\qquad\qquad)))))))))$$

×	○	×
×	○	○
○	×	×

三目並べ (ちょっとルール変更)：述語論理の視点から

質問

三目並べで「先手が必ず勝てる」という命題をどう書いたらよいか？

$$\exists a(\forall b(\exists c(\forall d(\exists e(\forall f(\exists g(\forall h(\exists i(\{a, c, e, g, i\} \text{ で一列占めている})))))))))$$

×	○	×
×	○	○
○	×	×

「∃ は自分，∀ は相手」

格言

「∀」「∃」が連なるときは，ゲームだと思うと分かりやすい

そう思って，以前の例を見てみる

次の閉論理式の真偽は？(再掲)

1. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$　偽
2. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\forall\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$　偽
3. $\forall\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$　真
4. $\exists\ m \in \{1,2\}\ (\exists\ n \in \{1,2\}\ (m+n$ は偶数である$))$　真

目次

論理式の恒真性

真理値表による恒真性の証明

- 命題論理式：できる
- 述語論理式：できないかもしれない (「無限」に対処できない)

同値変形による恒真性の証明

- 命題論理式：できるかもしれない
- 述語論理式：できるかもしれない

しかし，とても役に立つ

同値変形とは？: 例

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$(P \land (Q \land R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \land (P \land R))$$

同値変形とは?: 例

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$(P \land (Q \land R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \land (P \land R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$(P \land (Q \land R))$$

同値変形とは？: 例

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$(P \land (Q \land R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \land (P \land R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$(P \land (Q \land R)) \leftrightarrow ((P \land P) \land (Q \land R)) \qquad (\land \text{ の冪等法則})$$

$\land$ の冪等法則

$$(P \land P) \leftrightarrow P$$

同値変形とは?: 例

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge (P \wedge R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned}(P \wedge (Q \wedge R)) &\leftrightarrow ((P \wedge P) \wedge (Q \wedge R)) && (\wedge \text{ の冪等法則}) \\ &\leftrightarrow (P \wedge (P \wedge (Q \wedge R))) && (\wedge \text{ の結合法則})\end{aligned}$$

$\wedge$ の結合法則

$$((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$$

同値変形とは?: 例

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$(P \land (Q \land R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \land (P \land R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned}
(P \land (Q \land R)) &\leftrightarrow ((P \land P) \land (Q \land R)) && (\land \text{ の冪等法則}) \\
&\leftrightarrow (P \land ({\color{red}P} \land ({\color{green}Q} \land {\color{blue}R}))) && (\land \text{ の結合法則}) \\
&\leftrightarrow (P \land (({\color{red}P} \land {\color{green}Q}) \land {\color{blue}R})) && (\land \text{ の結合法則})
\end{aligned}$$

$\land$ の結合法則

$$(({\color{red}P} \land {\color{green}Q}) \land {\color{blue}R}) \leftrightarrow ({\color{red}P} \land ({\color{green}Q} \land {\color{blue}R}))$$

同値変形とは?: 例

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$(P \land (Q \land R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \land (P \land R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned}
(P \land (Q \land R)) &\leftrightarrow ((P \land P) \land (Q \land R)) && (\land \text{ の冪等法則}) \\
&\leftrightarrow (P \land (P \land (Q \land R))) && (\land \text{ の結合法則}) \\
&\leftrightarrow (\color{red}{P} \land (\color{green}{(P \land Q)} \land \color{blue}{R})) && (\land \text{ の結合法則}) \\
&\leftrightarrow ((\color{red}{P} \land \color{green}{(P \land Q)}) \land \color{blue}{R}) && (\land \text{ の結合法則})
\end{aligned}$$

$\land$ の結合法則

$$((\color{red}{P} \land \color{green}{Q}) \land \color{blue}{R}) \leftrightarrow (\color{red}{P} \land (\color{green}{Q} \land \color{blue}{R}))$$

同値変形とは?: 例

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$(P \land (Q \land R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \land (P \land R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned}
(P \land (Q \land R)) &\leftrightarrow ((P \land P) \land (Q \land R)) && (\land\ \text{の冪等法則}) \\
&\leftrightarrow (P \land (P \land (Q \land R))) && (\land\ \text{の結合法則}) \\
&\leftrightarrow (P \land ((P \land Q) \land R)) && (\land\ \text{の結合法則}) \\
&\leftrightarrow ((P \land (P \land Q)) \land R) && (\land\ \text{の結合法則}) \\
&\leftrightarrow (((P \land Q) \land P) \land R) && (\land\ \text{の交換法則})
\end{aligned}$$

$\land$ の交換法則

$$(P \land Q) \leftrightarrow (Q \land P)$$

同値変形とは?: 例

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$(P \land (Q \land R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \land (P \land R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned}
(P \land (Q \land R)) &\leftrightarrow ((P \land P) \land (Q \land R)) && (\land \textbf{ の冪等法則}) \\
&\leftrightarrow (P \land (P \land (Q \land R))) && (\land \textbf{ の結合法則}) \\
&\leftrightarrow (P \land ((P \land Q) \land R)) && (\land \textbf{ の結合法則}) \\
&\leftrightarrow ((P \land (P \land Q)) \land R) && (\land \textbf{ の結合法則}) \\
&\leftrightarrow (((P \land Q) \land P) \land R) && (\land \textbf{ の交換法則}) \\
&\leftrightarrow ((P \land Q) \land (P \land R)) && (\land \textbf{ の結合法則})
\end{aligned}$$

$\land$ の結合法則

$$((P \land Q) \land R) \leftrightarrow (P \land (Q \land R))$$

同値変形とは?: 例

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge (P \wedge R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned}
(P \wedge (Q \wedge R)) &\leftrightarrow ((P \wedge P) \wedge (Q \wedge R)) && (\wedge\ \text{の冪等法則}) \\
&\leftrightarrow (P \wedge (P \wedge (Q \wedge R))) && (\wedge\ \text{の結合法則}) \\
&\leftrightarrow (P \wedge ((P \wedge Q) \wedge R)) && (\wedge\ \text{の結合法則}) \\
&\leftrightarrow ((P \wedge (P \wedge Q)) \wedge R) && (\wedge\ \text{の結合法則}) \\
&\leftrightarrow (((P \wedge Q) \wedge P) \wedge R) && (\wedge\ \text{の交換法則}) \\
&\leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge (P \wedge R)) && (\wedge\ \text{の結合法則})
\end{aligned}$$

$\square$

同値変形とは？

同値変形とは？

論理式の一部として現れる論理式をそれと同値な論理式で置き換えること

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」の同値性が使える！

- 含意の除去，同値の除去
- 排中法則
- ド・モルガンの法則
- 対偶法則
- 冪等法則
- 二重否定の除去
- (吸収法則)
- 交換法則，結合法則
- 分配法則
- 定数の除去，変数の除去

重要な性質

同値変形によって恒真性は保たれる

同値変形とは?: 例 2

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$((P \land Q) \to R) \leftrightarrow (P \to (Q \to R))$$

同値変形とは?: 例 2

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$((P \land Q) \to R) \leftrightarrow (P \to (Q \to R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$((P \land Q) \to R)$$

同値変形とは？: 例 2

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$((P \land Q) \to R) \leftrightarrow (P \to (Q \to R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$((P \land Q) \to R) \leftrightarrow (\neg(P \land Q) \lor R) \qquad \textbf{(含意の除去)}$$

含意の除去

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \lor Q)$$

同値変形とは?: 例 2

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$((P \land Q) \to R) \leftrightarrow (P \to (Q \to R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned} ((P \land Q) \to R) &\leftrightarrow (\neg(P \land Q) \lor R) && \textbf{(含意の除去)} \\ &\leftrightarrow ((\neg P \lor \neg Q) \lor R) && \textbf{(ド・モルガンの法則)} \end{aligned}$$

ド・モルガンの法則

$$(\neg(P \land Q)) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)$$

同値変形とは?: 例 2

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$((P \wedge Q) \to R) \leftrightarrow (P \to (Q \to R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$
\begin{aligned}
((P \wedge Q) \to R) &\leftrightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee R) && \text{(含意の除去)} \\
&\leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee R) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\
&\leftrightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) && \text{($\vee$ の結合法則)}
\end{aligned}
$$

$\vee$ の結合法則

$$((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$$

同値変形とは?: 例 2

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$((P \land Q) \to R) \leftrightarrow (P \to (Q \to R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned}
((P \land Q) \to R) &\leftrightarrow (\neg(P \land Q) \lor R) && \text{(含意の除去)} \\
&\leftrightarrow ((\neg P \lor \neg Q) \lor R) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\
&\leftrightarrow (\neg P \lor (\neg Q \lor R)) && \text{($\lor$ の結合法則)} \\
&\leftrightarrow (\neg P \lor (Q \to R)) && \text{(含意の除去)}
\end{aligned}$$

含意の除去

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \lor Q)$$

同値変形とは?: 例 2

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$((P \land Q) \to R) \leftrightarrow (P \to (Q \to R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned}
((P \land Q) \to R) &\leftrightarrow (\neg(P \land Q) \lor R) && \text{(含意の除去)} \\
&\leftrightarrow ((\neg P \lor \neg Q) \lor R) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\
&\leftrightarrow (\neg P \lor (\neg Q \lor R)) && \text{(}\lor\text{ の結合法則)} \\
&\leftrightarrow (\neg P \lor (Q \to R)) && \text{(含意の除去)} \\
&\leftrightarrow (P \to (Q \to R)) && \text{(含意の除去)}
\end{aligned}$$

含意の除去

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \lor Q)$$

同値変形とは?: 例 2

次の命題論理式が恒真式であることを証明したい

$$((P \land Q) \to R) \leftrightarrow (P \to (Q \to R))$$

第 1 回の「重要な恒真命題」と「恒真命題いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned} ((P \land Q) \to R) &\leftrightarrow (\neg(P \land Q) \lor R) && \text{(含意の除去)} \\ &\leftrightarrow ((\neg P \lor \neg Q) \lor R) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\ &\leftrightarrow (\neg P \lor (\neg Q \lor R)) && \text{($\lor$ の結合法則)} \\ &\leftrightarrow (\neg P \lor (Q \to R)) && \text{(含意の除去)} \\ &\leftrightarrow (P \to (Q \to R)) && \text{(含意の除去)} \end{aligned}$$

$\square$

目次

論理式の恒真性 (再掲)

真理値表による恒真性の証明

- 命題論理式：できる
- 述語論理式：できないかもしれない (「無限」に対処できない)

同値変形による恒真性の証明

- 命題論理式：できるかもしれない
- 述語論理式：できるかもしれない

しかし，とても役に立つ

述語論理式に対して同値変形を行うためには，
述語論理における「重要な恒真式」を知る必要がある

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定

$\forall$ の否定，$\exists$ の否定 (重要！)

議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して，次は恒真

$$\neg(\forall\, x \in D\ (P(x))) \quad \leftrightarrow \quad \exists\, x \in D\ (\neg P(x))$$
$$\neg(\exists\, x \in D\ (P(x))) \quad \leftrightarrow \quad \forall\, x \in D\ (\neg P(x))$$

$D = \{a, b\}$ のときの証明：$\forall$ と $\exists$ の定義を思い出し，書き直すと

$$\neg(P(a) \wedge P(b)) \quad \leftrightarrow \quad (\neg P(a) \vee \neg P(b))$$
$$\neg(P(a) \vee P(b)) \quad \leftrightarrow \quad (\neg P(a) \wedge \neg P(b))$$

これらは命題論理におけるド・モルガンの法則と同じ

注意

D が無限集合の場合の証明は，この授業の範囲を越えるのでやらない

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 1】

「徳川将軍は全員男である」の否定は？

∀ の否定

$$\neg(\forall\, x\ (P(x)) \leftrightarrow \exists\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 1】

「徳川将軍は全員男である」の否定は？

? 徳川将軍は全員男でない (分かりにくい日本語)

∀ の否定

$$\neg(\forall\ x\ (P(x)) \leftrightarrow \exists\ x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 1】

「徳川将軍は全員男である」の否定は？

? 徳川将軍は全員男でない (分かりにくい日本語)

× 徳川将軍は誰も男でない

∀ の否定

$$\neg(\forall\ x\ (P(x)) \leftrightarrow \exists\ x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 1】

「徳川将軍は全員男である」の否定は？

- ? 徳川将軍は全員男でない (分かりにくい日本語)
- × 徳川将軍は誰も男でない
- ○ 徳川将軍の誰かは男でない

∀ の否定

$$\neg(\forall\ x\ (P(x)) \leftrightarrow \exists\ x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 1】

「徳川将軍は全員男である」の否定は？

? 徳川将軍は全員男でない (分かりにくい日本語)

× 徳川将軍は誰も男でない

○ 徳川将軍の誰かは男でない

「すべての人は自転車に乗れる」の否定は？

∀ の否定

$$\neg(\forall\, x\ (P(x)) \leftrightarrow \exists\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 1】

「徳川将軍は全員男である」の否定は？

- ？ 徳川将軍は全員男でない　(分かりにくい日本語)
- × 徳川将軍は誰も男でない
- ◯ 徳川将軍の誰かは男でない

「すべての人は自転車に乗れる」の否定は？

- × すべての人は自転車に乗れない

∀ の否定

$$\neg(\forall\, x\ (P(x)) \leftrightarrow \exists\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 1】

「徳川将軍は全員男である」の否定は？

- ？ 徳川将軍は全員男でない　(分かりにくい日本語)
- × 徳川将軍は誰も男でない
- ○ 徳川将軍の誰かは男でない

「すべての人は自転車に乗れる」の否定は？

- × すべての人は自転車に乗れない
- ○ ある人は自転車に乗れない

∀ の否定

$$\neg(\forall\, x\ (P(x)) \leftrightarrow \exists\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定　【重要なので補足 1】

「徳川将軍は全員男である」の否定は？

- ? 徳川将軍は全員男でない　　(分かりにくい日本語)
- × 徳川将軍は誰も男でない
- ○ 徳川将軍の誰かは男でない

「すべての人は自転車に乗れる」の否定は？

- × すべての人は自転車に乗れない
- ○ ある人は自転車に乗れない
- ○ 自転車に乗れない人がいる

∀ の否定

$$\neg(\forall\, x\ (P(x)) \leftrightarrow \exists\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定　【重要なので補足 2】

「徳川将軍は誰か 70 年以上生きた」の否定は？

∃ の否定

$$\neg(\exists\, x\ (P(x)) \leftrightarrow \forall\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 2】

「徳川将軍は誰か 70 年以上生きた」の否定は？

× **徳川将軍は誰か 70 年以上生きていない**

∃ の否定

$$\neg(\exists\, x\ (P(x)) \leftrightarrow \forall\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 2】

「徳川将軍は誰か 70 年以上生きた」の否定は？

× 徳川将軍は誰か 70 年以上生きていない

○ 徳川将軍は誰も 70 年以上生きていない

∃ の否定

$$\neg(\exists\, x\ (P(x)) \leftrightarrow \forall\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 2】

「徳川将軍は誰か 70 年以上生きた」の否定は？

× 徳川将軍は誰か 70 年以上生きていない

○ 徳川将軍は誰も 70 年以上生きていない

「ある人は UFO に乗った」の否定は？

∃ の否定

$$\neg(\exists\, x\ (P(x)) \leftrightarrow \forall\, x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 2】

「徳川将軍は誰か 70 年以上生きた」の否定は？

× 徳川将軍は誰か 70 年以上生きていない

○ 徳川将軍は誰も 70 年以上生きていない

「ある人は UFO に乗った」の否定は？

× ある人は UFO に乗っていない

∃ の否定

$$\neg(\exists\ x\ (P(x)) \leftrightarrow \forall\ x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定 【重要なので補足 2】

「徳川将軍は誰か 70 年以上生きた」の否定は？

× 徳川将軍は誰か 70 年以上生きていない

◯ 徳川将軍は誰も 70 年以上生きていない

「ある人は UFO に乗った」の否定は？

× ある人は UFO に乗っていない

? すべての人は UFO に乗っていない (分かりにくい日本語)

∃ の否定

$$\neg(\exists\ x\ (P(x)) \leftrightarrow \forall\ x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (1)：否定　【重要なので補足 2】

「徳川将軍は誰か 70 年以上生きた」の否定は？

× 徳川将軍は誰か 70 年以上生きていない

○ 徳川将軍は誰も 70 年以上生きていない

「ある人は UFO に乗った」の否定は？

× ある人は UFO に乗っていない

? すべての人は UFO に乗っていない　(分かりにくい日本語)

○ どの人も UFO に乗っていない

∃ の否定

$$\neg(\exists\ x\ (P(x)) \leftrightarrow \forall\ x\ (\neg P(x))$$

述語論理における重要な恒真式 (2)：分配法則

∀ の分配法則，∃ の分配法則

議論領域 D と命題関数 $P(x)$，$Q(x)$ に対して，次は恒真

$$
\begin{aligned}
(\forall\, x \in D\ (P(x))) \land (\forall\, x \in D\ (Q(x))) &\leftrightarrow \forall\, x \in D\ (P(x) \land Q(x)) \\
(\exists\, x \in D\ (P(x))) \lor (\exists\, x \in D\ (Q(x))) &\leftrightarrow \exists\, x \in D\ (P(x) \lor Q(x))
\end{aligned}
$$

<u>$D = \{a, b\}$ **のときの証明：**</u>**演習問題**

注意

次は恒真ではない

$$
\begin{aligned}
(\forall\, x \in D\ (P(x))) \lor (\forall\, x \in D\ (Q(x))) &\overset{?}{\leftrightarrow} \forall\, x \in D\ (P(x) \lor Q(x)) \\
(\exists\, x \in D\ (P(x))) \land (\exists\, x \in D\ (Q(x))) &\overset{?}{\leftrightarrow} \exists\, x \in D\ (P(x) \land Q(x))
\end{aligned}
$$

述語論理における重要な恒真式 (3)：交換法則

交換法則

議論領域 D と命題関数 $P(x,y)$ に対して，次は恒真

$$\forall\, x \in D\ (\forall\, y \in D\ (P(x,y))) \quad \leftrightarrow \quad \forall\, y \in D\ (\forall\, x \in D\ (P(x,y)))$$
$$\exists\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x,y))) \quad \leftrightarrow \quad \exists\, y \in D\ (\exists\, x \in D\ (P(x,y)))$$

$D = \{a, b\}$ のときの証明：演習問題

述語論理における重要な恒真式 (4)：導入

$\forall$ の導入，$\exists$ の導入

議論領域 D と命題 P に対して，次は恒真

$$
\begin{aligned}
P &\leftrightarrow \forall\, x \in D\ (P) \\
P &\leftrightarrow \exists\, x \in D\ (P)
\end{aligned}
$$

注：P の中に x は自由変数として現れない

$D = \{a, b\}$ のときの証明：演習問題

述語論理における重要な恒真式 (5)：束縛変数の変更

束縛変数の変更

議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して，次は恒真

$$\forall\, x \in D\ (P(x)) \quad \leftrightarrow \quad \forall\, y \in D\ (P(y))$$
$$\exists\, x \in D\ (P(x)) \quad \leftrightarrow \quad \exists\, y \in D\ (P(y))$$

注：$P(x)$ の中に y は自由変数として現れず，
$P(y)$ の中に x は自由変数として現れない

この正しさはすぐに分かる

参考

積分 (など) でも同じような恒等式がある

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

$$\neg(\forall\, x\ (P(x) \to Q(x))) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \land \neg Q(x))$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

$$\neg(\forall\ x\ (P(x) \to Q(x))) \leftrightarrow \exists\ x\ (P(x) \land \neg Q(x))$$

$$\neg(\forall\ x\ (P(x) \to Q(x)))$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

$$\neg(\forall\, x\ (P(x) \to Q(x))) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\neg(\forall\, x\ (P(x) \to Q(x))) \leftrightarrow \neg(\forall\, x\ (\neg P(x) \vee Q(x))) \quad \textbf{(含意の除去)}$$

含意の除去

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

$$\neg(\forall\, x\ (P(x) \to Q(x))) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \land \neg Q(x))$$

$$\begin{aligned}\neg(\forall\, x\ (P(x) \to Q(x))) &\leftrightarrow \neg(\forall\, x\ (\neg P(x) \lor Q(x))) && \text{(含意の除去)}\\ &\leftrightarrow \exists\, x\ (\neg(\neg P(x) \lor Q(x))) && \text{($\forall$ の否定)}\end{aligned}$$

$\forall$ の否定

$$\neg(\forall\, x\ (P(x))) \leftrightarrow \exists\, x\ (\neg P(x))$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

$$\neg(\forall\, x\ (P(x) \rightarrow Q(x))) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\begin{aligned}
\neg(\forall\, x\ (P(x) \rightarrow Q(x))) &\leftrightarrow \neg(\forall\, x\ (\neg P(x) \vee Q(x))) && \text{(含意の除去)}\\
&\leftrightarrow \exists\, x\ (\neg(\neg P(x) \vee Q(x))) && (\forall\ \text{の否定})\\
&\leftrightarrow \exists\, x\ (\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{(ド・モルガンの法則)}
\end{aligned}$$

ド・モルガンの法則

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

$$\neg(\forall\, x\, (P(x) \to Q(x))) \leftrightarrow \exists\, x\, (P(x) \land \neg Q(x))$$

$$\begin{aligned}
\neg(\forall\, x\, (P(x) \to Q(x))) &\leftrightarrow \neg(\forall\, x\, (\neg P(x) \lor Q(x))) && \textbf{(含意の除去)} \\
&\leftrightarrow \exists\, x\, (\neg(\neg P(x) \lor Q(x))) && (\forall\ \textbf{の否定}) \\
&\leftrightarrow \exists\, x\, (\neg\neg P(x) \land \neg Q(x)) && \textbf{(ド・モルガンの法則)} \\
&\leftrightarrow \exists\, x\, (P(x) \land \neg Q(x)) && \textbf{(二重否定の除去)}
\end{aligned}$$

二重否定の除去

$$\neg\neg P \leftrightarrow P$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

$$\neg(\forall\, x\ (P(x) \rightarrow Q(x))) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \land \neg Q(x))$$

$$\begin{aligned}
\neg(\forall\, x\ (P(x) \rightarrow Q(x))) &\leftrightarrow \neg(\forall\, x\ (\neg P(x) \lor Q(x))) && \textbf{(含意の除去)} \\
&\leftrightarrow \exists\, x\ (\neg(\neg P(x) \lor Q(x))) && (\forall\ \textbf{の否定}) \\
&\leftrightarrow \exists\, x\ (\neg\neg P(x) \land \neg Q(x)) && \textbf{(ド・モルガンの法則)} \\
&\leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \land \neg Q(x)) && \textbf{(二重否定の除去)}
\end{aligned}$$

□

同値変形による恒真性の証明：例 2

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

命題関数 $P(x)$ **と命題変数** Q **に対して**

$$(\forall\, x\ (P(x)) \to Q) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \to Q)$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$(\forall\ x\ (P(x)) \rightarrow Q) \leftrightarrow \exists\ x\ (P(x) \rightarrow Q)$$

$$(\forall\ x\ (P(x)) \rightarrow Q)$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

命題関数 $P(x)$ **と命題変数** Q **に対して**

$$(\forall\, x\ (P(x)) \to Q) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \to Q)$$

$$(\forall\, x\ (P(x)) \to Q) \leftrightarrow (\neg(\forall\, x\ (P(x))) \vee Q) \qquad \text{(含意の除去)}$$

含意の除去

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$(\forall\ x\ (P(x)) \to Q) \leftrightarrow \exists\ x\ (P(x) \to Q)$$

$$(\forall\ x\ (P(x)) \to Q) \leftrightarrow (\neg(\forall\ x\ (P(x))) \vee Q) \qquad \text{(含意の除去)}$$
$$\leftrightarrow (\exists\ x\ (\neg P(x)) \vee Q) \qquad \text{($\forall$ の否定)}$$

$\forall$ の否定

$$\neg\forall\ x\ (P(x)) \leftrightarrow \exists\ x\ (\neg P(x))$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$(\forall\ x\ (P(x)) \to Q) \leftrightarrow \exists\ x\ (P(x) \to Q)$$

$$\begin{aligned}
(\forall\ x\ (P(x)) \to Q) &\leftrightarrow (\neg(\forall\ x\ (P(x))) \vee Q) && \text{(含意の除去)} \\
&\leftrightarrow (\exists\ x\ (\neg P(x)) \vee Q) && (\forall\ \text{の否定}) \\
&\leftrightarrow (\exists\ x\ (\neg P(x)) \vee \exists\ x\ (Q)) && (\exists\ \text{の導入})
\end{aligned}$$

$\exists$ の導入

$$P \leftrightarrow \exists\ x\ (P)$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

命題関数 $P(x)$ **と命題変数** Q **に対して**

$$(\forall\, x\ (P(x)) \to Q) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \to Q)$$

$$\begin{aligned}
(\forall\, x\ (P(x)) \to Q) &\leftrightarrow (\neg(\forall\, x\ (P(x))) \lor Q) && \text{(含意の除去)}\\
&\leftrightarrow (\exists\, x\ (\neg P(x)) \lor Q) && \text{($\forall$ の否定)}\\
&\leftrightarrow (\exists\, x\ (\neg P(x)) \lor \exists\, x\ (Q)) && \text{($\exists$ の導入)}\\
&\leftrightarrow \exists\, x\ (\neg P(x) \lor Q) && \text{($\exists$ の分配法則)}
\end{aligned}$$

$\exists$ の分配法則

$$(\exists\, x\ (P(x) \lor Q(x))) \leftrightarrow (\exists\, x\ (P(x)) \lor (\exists\, x\ (Q(x))))$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$(\forall\ x\ (P(x)) \to Q) \leftrightarrow \exists\ x\ (P(x) \to Q)$$

$$\begin{aligned}
(\forall\ x\ (P(x)) \to Q) &\leftrightarrow (\neg(\forall\ x\ (P(x))) \vee Q) && \text{(含意の除去)} \\
&\leftrightarrow (\exists\ x\ (\neg P(x)) \vee Q) && \text{(}\forall\text{ の否定)} \\
&\leftrightarrow (\exists\ x\ (\neg P(x)) \vee \exists\ x\ (Q)) && \text{(}\exists\text{ の導入)} \\
&\leftrightarrow \exists\ x\ (\neg P(x) \vee Q) && \text{(}\exists\text{ の分配法則)} \\
&\leftrightarrow \exists\ x\ (P(x) \to Q) && \text{(含意の除去)}
\end{aligned}$$

含意の除去

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次の述語論理式が恒真式であることを証明したい

命題関数 $P(x)$ **と命題変数** Q **に対して**

$$(\forall\, x\ (P(x)) \to Q) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \to Q)$$

$$\begin{aligned}
(\forall\, x\ (P(x)) \to Q) &\leftrightarrow (\neg(\forall\, x\ (P(x))) \vee Q) && \text{(含意の除去)} \\
&\leftrightarrow (\exists\, x\ (\neg P(x)) \vee Q) && \text{($\forall$ の否定)} \\
&\leftrightarrow (\exists\, x\ (\neg P(x)) \vee \exists\, x\ (Q)) && \text{($\exists$ の導入)} \\
&\leftrightarrow \exists\, x\ (\neg P(x) \vee Q) && \text{($\exists$ の分配法則)} \\
&\leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \to Q) && \text{(含意の除去)}
\end{aligned}$$

□

目次

今日のまとめ

述語論理

- $\forall x\,(\cdots)$：すべての x に対して $\cdots$
- $\exists x\,(\cdots)$：ある x に対して $\cdots$

同値変形による恒真性の証明

- 同値な論理式で置き換えても，真偽は変わらない
- 重要：$\forall$ の否定，$\exists$ の否定

述語論理：補足

疑問 ?: 恒真性の証明

なぜ述語論理の論理式は，その恒真性を真理値表で証明できないのか？

これにちゃんと答えるためには,「シンタックス」と「セマンティクス」など論理学の基盤・重要概念を学ぶ必要がある．

興味のある人は次のことばを調べてみる

- シンタックス (統語論) とセマンティクス (意味論)
- 述語論理における「解釈」
- 証明論とモデル理論

シンタックスとセマンティクスは自然言語処理，人工知能においても重要な概念

これは「論理学」の授業ではないので，これ以上深く立ち入らない

目次