離散数学 第 2 回
集合 (1)：集合とは何か

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 4 月 24 日

最終更新：2012 年 4 月 24 日　21:39

概要

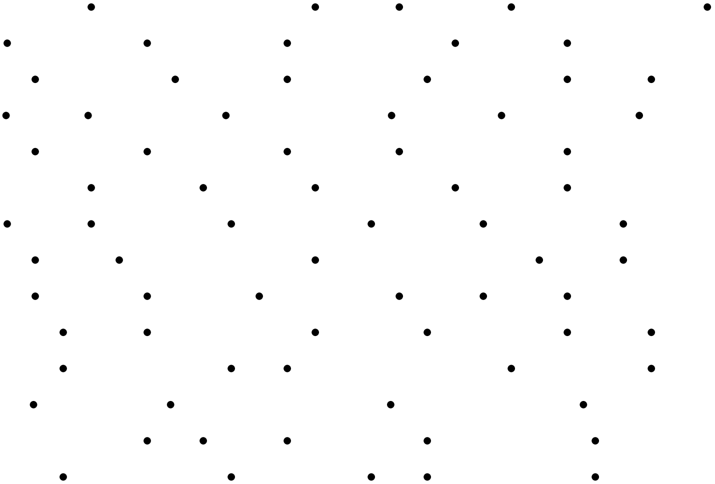
今日の目標

- 命題論理を通して，集合に対する定義を理解すること
- 命題論理を通して，集合に対する定理を証明すること
  - の第 1 ステップ (定義に基づいて証明すべき命題を得ること) を理解すること

前回の内容の復習が必要

目次

共通点は何？



共通点は何？

共通点は何？

カメレオン

とかげ

共通点は何？

• カメレオン •

• とかげ •

• へび •

共通点は何？

かに

カメレオン

とかげ

へび

共通点は何？

いるか

かに

カメレオン

とかげ

へび

共通点は何？

いるか

かに

カメレオン

とかげ

へび

わし

共通点は何？

• • • いるか • •

• • • • •

• • • • • •

• かに • • カメレオン • • •

• • • • •

• • • • •

• • • • • •

• • • • •

• とかげ • • • • • はくちょう

• • • • • へび •

• • • • •

• • • •

• • • • •

• • • • • わし

共通点は何？

• いるか •

• かに •

• カメレオン •

• こいぬ •

• とかげ •

• はくちょう

• へび •

• わし

共通点は何？

いるか

おおいぬ

かに

カメレオン

こいぬ

とかげ

はくちょう

へび

わし

共通点は何？

• • •いるか• •
うさぎ• •うみへび• • •おおいぬ
おおかみ•おおぐま• • • • •
かじき•かに• •カメレオン•からす• •
•きりん•くじゃく•くじら• •
•こいぬ•こうま•こぎつね•こぐま•こじし
• • • • • •
• • • •つる•
•とかげ• •とびうお• •はえ•はくちょう
•はと• • • •へび•
• • • • •
•みずへび• • •
• • •やまねこ• •
• • • • •わし

共通点は何？

・ ・いて・いるか・ ・うお
うさぎ・ ・うみへび・ ・おうし・おおいぬ
おおかみ・おおぐま・おとめ・おひつじ・ ・ ・
かじき・かに・ ・カメレオン・からす・ ・
・きりん・くじゃく・くじら・ ・
・こいぬ・こうま・こぎつね・こぐま・こじし
・ ・ ・ ・さそり・ ・しし
・ ・ ・ ・つる・
てんびん・とかげ・ ・とびうお・ ・はえ・はくちょう
・はと・ ・ふたご・ ・へび・
・ ・ ・ ・ ・
みずがめ・みずへび・ ・ ・
・ ・やぎ・やまねこ・ ・
・ ・ ・ ・ ・わし

共通点は何？

アンドロメダ・　　　　　　・いて・いるか・　　　　・うお
うさぎ・　　　・うみへび・エリダヌス・おうし・おおいぬ
おおかみ・おおぐま・おとめ・おひつじ・オリオン・　　・カシオペヤ
かじき・かに・　　　・カメレオン・からす・　　　・
・きりん・くじゃく・くじら・ケフェウス・ケンタウルス
・こいぬ・こうま・こぎつね・こぐま・こじし
・　・　　・　　・さそり・　　　・しし
・　・　　・　　　　・つる・
てんびん・とかげ・　　・とびうお・　・はえ・はくちょう
・はと・　　・ふたご・ペガスス・へび・
ヘルクレス・ペルセウス・　・　　　・　　・
みずがめ・みずへび・　　　　・　　　・
・　・やぎ・やまねこ・　　　・
・　　　・レチクル・　・　　　・わし

共通点は何？

アンドロメダ・いっかくじゅう・いて・いるか・インディアン・うお
うさぎ・うしかい・うみへび・エリダヌス・おうし・おおいぬ
おおかみ・おおぐま・おとめ・おひつじ・オリオン・がか・カシオペヤ
かじき・かに・かみのけ・カメレオン・からす・かんむり・きょしちょう
ぎょしゃ・きりん・くじゃく・くじら・ケフェウス・ケンタウルス
けんびきょう・こいぬ・こうま・こぎつね・こぐま・こじし
コップ・こと・コンパス・さいだん・さそり・さんかく・しし
じょうぎ・たて・ちょうこくぐ・ちょうこくしつ・つる・テーブルさん
てんびん・とかげ・とけい・とびうお・とも・はえ・はくちょう
はちぶんぎ・はと・ふうちょう・ふたご・ペガスス・へび・へびつかい
ヘルクレス・ペルセウス・ほ・ぼうえんきょう・ほうおう・ポンプ
みずがめ・みずへび・みなみじゅうじ・みなみのうお・みなみのかんむり
みなみのさんかく・や・やぎ・やまねこ・らしんばん・りゅう
りゅうこつ・りょうけん・レチクル・ろ・ろくぶんぎ・わし

共通点は何？ パート 2

共通点は何？ パート 2

- 札幌

共通点は何？ パート 2

- 札幌

- 広島

共通点は何？ パート 2

- 札幌
- 広島
- 横浜

共通点は何？ パート 2

- 札幌
- 名古屋
- 広島
- 横浜

共通点は何？ パート 2

- 札幌
- 名古屋
- 大阪
- 広島
- 横浜

共通点は何？ パート 2

- 札幌
- 名古屋
- 大阪
- 大阪
- 広島
- 横浜

共通点は何？ パート 2

- 札幌
- 名古屋
- 大阪
- 大阪
- 東京
- 広島
- 横浜

共通点は何？ パート 2

- 札幌
- 仙台
- 東京
- 横浜
- 名古屋
- 大阪
- 大阪
- 広島

共通点は何？ パート 2

- 札幌
- 仙台
- 名古屋
- 大阪
- 大阪
- 柏
- 東京
- 広島
- 横浜

共通点は何？ パート 2

- 札幌
- 仙台
- 名古屋
- 大阪
- 大阪
- 柏
- 東京
- 広島
- 横浜
- 鳥栖

共通点は何？ パート 2

- 札幌
- 仙台
- 鹿島
- 浦和
- 大宮
- 柏
- 東京
- 川崎
- 横浜
- 新潟
- 清水
- 磐田
- 名古屋
- 大阪
- 大阪
- 神戸
- 広島
- 鳥栖

共通点は何？ パート 2

- コンサドーレ札幌
- ベガルタ仙台
- 鹿島アントラーズ
- 浦和レッドダイヤモンズ
- 大宮アルディージャ
- 柏レイソル
- FC 東京
- 川崎フロンターレ
- 横浜 F・マリノス
- アルビレックス新潟
- 清水エスパルス
- ジュビロ磐田
- 名古屋グランパスエイト
- ガンバ大阪
- セレッソ大阪
- ヴィッセル神戸
- サンフレッチェ広島
- サガン鳥栖

共通点は何？ パート 2

- コンサドーレ札幌
- ベガルタ仙台
- 鹿島アントラーズ
- 浦和レッドダイヤモンズ
- 大宮アルディージャ
- 柏レイソル
- FC 東京
- 川崎フロンターレ
- 横浜 F・マリノス
- アルビレックス新潟
- 清水エスパルス
- ジュビロ磐田
- 名古屋グランパスエイト
- ガンバ大阪
- セレッソ大阪
- ヴィッセル神戸
- サンフレッチェ広島
- サガン鳥栖

クイズ

この中で，J2 に降格したことがないのは？

共通点は何？ パート 2

- 鹿島アントラーズ
- 大宮アルディージャ
- 横浜 F・マリノス
- アルビレックス新潟
- 清水エスパルス
- ジュビロ磐田
- 名古屋グランパスエイト
- ガンバ大阪
- サガン鳥栖

クイズ

この中で，J2 に降格したことがないのは？

目次

集合

集合 (常識に基づく定義)

集合とはものの集まり

集合の記法

波かっこ 「$\{$」と「$\}$」を使って記述する

例：

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\{$ あ, い, う, え, お $\}$

集合の要素とは？

集合を構成する 1 つ 1 つのものを**要素**または**元**と呼ぶ

格言

数学理解の基本は「定義」と「記法」の理解

要素であることの記法

記法

- x が集合 A の要素であることを次のように表記する

$$x \in A$$

- x が集合 A の要素ではないことを次のように表記する

$$x \notin A$$

例：$A = \{$ あ, い, う, え, お $\}$ とすると

- あ $\in A$
- ま $\notin A$
- お $\in A$
- う $\in A$

集合の記述法 (1)：要素を並べる

$$U = \{\text{アメリカ}, \text{イギリス}, \text{イタリア}, \text{オーストリア}, \text{オーストラリア}, \text{オランダ}, \text{カナダ}, \text{韓国}, \text{ギリシャ}, \text{スウェーデン}, \text{スイス}, \text{スペイン}, \text{ソ連}, \text{中国}, \text{ドイツ}, \text{西ドイツ}, \text{日本}, \text{ノルウェー}, \text{フィンランド}, \text{フランス}, \text{ベルギー}, \text{メキシコ}, \text{ユーゴスラビア}\}$$

集合の「外延的定義」と呼ばれる

集合の記述法 (2)：性質を定める

$$U = \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 近代オリンピックが開催された国}\}$$

記法

「$\{x \mid x$ がこの集合の要素であるための (必要十分) 条件 $\}$」

「$\mid$」の代わりに「:」や「;」を使うこともある

集合の「内包的定義」と呼ばれる

集合の記述法：他の例

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

集合の記述法：他の例

$$\begin{aligned} A &= \{2,3,5,7\} \\ &= \{7,2,5,3\} \end{aligned}$$

←並べる順番が違っても集合としては同じ

集合の記述法：他の例

$$\begin{aligned} A &= \{2,3,5,7\} \\ &= \{7,2,5,3\} \end{aligned}$$

←並べる順番が違っても集合としては同じ

$$= \{ n \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である} \}$$

集合の記述法：他の例

$$
\begin{aligned}
A &= \{2,3,5,7\} \\
&= \{7,2,5,3\} \qquad \textbf{←並べる順番が違っても集合としては同じ} \\
&= \{\, n \mid n \textbf{ は } 10 \textbf{ 以下の素数である} \,\} \\
&= \left\{ n \,\middle|\, \begin{array}{l} n \textbf{ は整数であり，かつ，} \\ n^4 - 17n^3 + 101n^2 - 247n + 210 = 0 \textbf{ を満たす} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例

$$
\begin{aligned}
A &= \{2, 3, 5, 7\} \\
&= \{7, 2, 5, 3\} \qquad \text{←並べる順番が違っても集合としては同じ} \\
&= \{n \mid n \text{ は 10 以下の素数である}\} \\
&= \left\{ n \;\middle|\; \begin{array}{l} n \text{ は整数であり，かつ，} \\ n^4 - 17n^3 + 101n^2 - 247n + 210 = 0 \text{ を満たす} \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

外延的定義の利点・欠点

利点

- 何が要素か分かりやすい

欠点

- 全要素を並べる必要がある
- 全要素を並べられないかも
- 集合の性質が分かりにくい

内包的定義の利点・欠点

利点

- 集合の性質が分かりやすい
- 全要素を並べなくてもよい

欠点

- 何が要素か分かりにくい
- よく書き間違える（要努力！）

集合の記述法：他の例 2

$$B = \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\}$$

集合の記述法：他の例 2

$$\begin{aligned} B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\ &= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \end{aligned}$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である } \} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である}\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{m - n \mid m \text{ と } n \text{ は 10 以下の素数である}\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である }\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{m - n \mid m \text{ と } n \text{ は } 10 \text{ 以下の素数である }\} \\
&= \{2-2, 2-3, 2-5, 2-7, 3-2, 3-3, 3-5, 3-7, \\
&\quad\ 5-2, 5-3, 5-5, 5-7, 7-2, 7-3, 7-5, 7-7\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{m - n \mid m \text{ と } n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\
&= \{2-2, 2-3, 2-5, 2-7, 3-2, 3-3, 3-5, 3-7, \\
&\quad 5-2, 5-3, 5-5, 5-7, 7-2, 7-3, 7-5, 7-7\} \\
&= \{0, -1, -3, -5, 1, 0, -2, -4, 3, 2, 0, -2, 5, 4, 2, 0\}
\end{aligned}
$$

集合の記述法：他の例 2

$$
\begin{aligned}
B &= \{ n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である} \} \\
&= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\
&= \{4, 9, 25, 49\} \\
C &= \{ m - n \mid m \text{ と } n \text{ は 10 以下の素数である} \} \\
&= \{2-2, 2-3, 2-5, 2-7, 3-2, 3-3, 3-5, 3-7, \\
&\quad 5-2, 5-3, 5-5, 5-7, 7-2, 7-3, 7-5, 7-7\} \\
&= \{0, -1, -3, -5, 1, 0, -2, -4, 3, 2, 0, -2, 5, 4, 2, 0\} \\
&= \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}
\end{aligned}
$$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N} =$ すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z} =$ すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q} =$ すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R} =$ すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C} =$ すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}=$ すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}=$ すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}=$ すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}=$ すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}=$ すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N} =$ すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z} =$ すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q} =$ すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R} =$ すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C} =$ すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- $1 + \sqrt{2}i \notin \mathbb{R}$
- $1 + \sqrt{2}i \in \mathbb{C}$

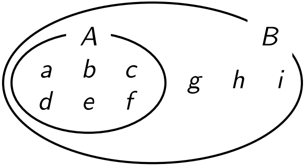
部分集合：直観

次の 2 つの集合を考える

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

図に描いてみる
(「オイラー図」と呼ぶ)



部分集合とは？ (直観)

集合 A が集合 B の部分集合であるとは，A が B に含まれていること

「含まれている」とは？ 論理を使って書くことを考える

部分集合：定義

部分集合とは？(論理を使った定義)

A が B の部分集合であるとは，どの x に対しても次が成り立つこと

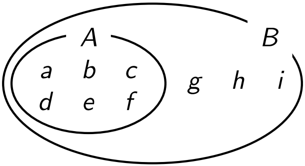
$$x \in A \text{ ならば } x \in B$$

次の 2 つの集合を考える

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

図に描いてみる



部分集合の表記法

A が B の部分集合であることを「$A \subseteq B$」と表記する

「$A \subset B$」や「$A \subseteqq B$」と表記することもある

例 1

$$
\begin{aligned}
U &= \{\,\text{アメリカ}, \text{イギリス}, \text{イタリア}, \text{オーストリア}, \text{オーストラリア}, \\
&\quad \text{オランダ}, \text{カナダ}, \text{韓国}, \text{ギリシャ}, \text{スウェーデン}, \text{スイス}, \\
&\quad \text{スペイン}, \text{ソ連}, \text{中国}, \text{ドイツ}, \text{西ドイツ}, \text{日本}, \text{ノルウェー}, \\
&\quad \text{フィンランド}, \text{フランス}, \text{ベルギー}, \text{メキシコ}, \text{ユーゴスラビア}\,\} \\
&= \{x \mid x\ \text{は}\ (2011\ \text{年までに})\ \text{近代オリンピックが開催された国}\,\} \\
W &= \{x \mid x\ \text{は}\ (2011\ \text{年までに})\ \text{冬季オリンピックが開催された国}\,\}
\end{aligned}
$$

このとき，$W \subseteq U$ となる

例 1

$$
\begin{aligned}
U &= \{ \text{アメリカ}, \text{イギリス}, \text{イタリア}, \text{オーストリア}, \text{オーストラリア}, \\
&\quad \text{オランダ}, \text{カナダ}, \text{韓国}, \text{ギリシャ}, \text{スウェーデン}, \text{スイス}, \\
&\quad \text{スペイン}, \text{ソ連}, \text{中国}, \text{ドイツ}, \text{西ドイツ}, \text{日本}, \text{ノルウェー}, \\
&\quad \text{フィンランド}, \text{フランス}, \text{ベルギー}, \text{メキシコ}, \text{ユーゴスラビア} \} \\
&= \{x \mid x \text{ は } (2011 \text{ 年までに}) \text{ 近代オリンピックが開催された国} \} \\
W &= \{x \mid x \text{ は } (2011 \text{ 年までに}) \text{ 冬季オリンピックが開催された国} \} \\
&= \{ \text{アメリカ}, \text{イタリア}, \text{オーストリア}, \text{カナダ}, \text{スイス}, \text{ドイツ}, \\
&\quad \text{日本}, \text{ノルウェー}, \text{フランス}, \text{ユーゴスラビア} \}
\end{aligned}
$$

このとき，$W \subseteq U$ となる

例 2

表記法：復習

- $\mathbb{N}$ = **すべての自然数からなる集合**
- $\mathbb{Z}$ = **すべての整数からなる集合**
- $\mathbb{Q}$ = **すべての有理数からなる集合**
- $\mathbb{R}$ = **すべての実数からなる集合**
- $\mathbb{C}$ = **すべての複素数からなる集合**

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

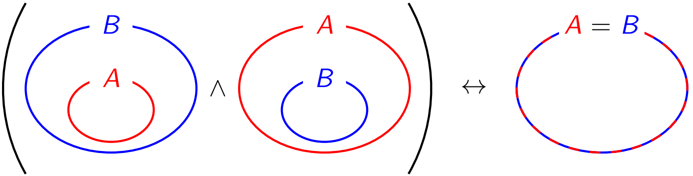
同じ集合

同じ集合

2 **つの集合** A **と** B **が同じであることを**

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

が成り立つことと定義し，「$A = B$**」と表記する**



目次

共通部分

共通部分とは？

集合 A, B **の共通部分を** $A \cap B$ **と表記し，**

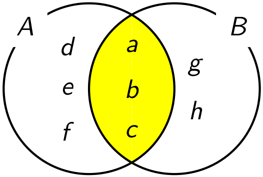
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ **のとき，**
- $A \cap B = \{a, b, c\}$

オイラー図



「共通部分」は「積集合」,「交わり」とも呼ばれる

共通部分：例

$$
\begin{aligned}
W &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 冬季オリンピックが開催された国}\} \\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, オーストリア, カナダ, スイス, ドイツ,} \\
&\quad \text{日本, ノルウェー, フランス, ユーゴスラビア}\} \\
S &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 夏季オリンピックが開催された国}\} \\
&= \{\text{アメリカ, イギリス, イタリア, オーストラリア, オランダ,} \\
&\quad \text{カナダ, 韓国, ギリシャ, スウェーデン, スペイン, ソ連,} \\
&\quad \text{中国, ドイツ, 西ドイツ, 日本, フィンランド, フランス,} \\
&\quad \text{ベルギー, メキシコ}\} \\
W \cap S &= \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} x \text{ は (2011 年までに) 夏季オリンピックと} \\ \text{冬季オリンピックがともに開催された国} \end{array} \right\} \\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, カナダ, ドイツ, 日本, フランス}\}
\end{aligned}
$$

合併

合併とは？

集合 A, B の**合併**を $A \cup B$ と表記し，

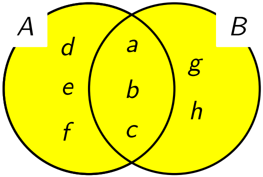
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき，
- $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

オイラー図



「合併」は「和集合」,「結び」とも呼ばれる

合併：例

$$
\begin{aligned}
I &= \{x \mid x \text{ は 19 世紀に近代オリンピックが開催された国}\} \\
&= \{\text{ギリシャ, フランス}\} \\
J &= \{x \mid x \text{ は 21 世紀 (2011 年まで) に近代五輪が開催された国}\} \\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, カナダ, ギリシャ, 中国}\} \\
I \cup J &= \left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{l} x \text{ は 19 世紀か 21 世紀 (2011 年まで) に} \\ \text{近代オリンピックが開催された国} \end{array} \right\} \\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, カナダ, ギリシャ, 中国, フランス}\}
\end{aligned}
$$

差集合

差集合とは？

集合 A, B に対して，差集合 $A - B$ を

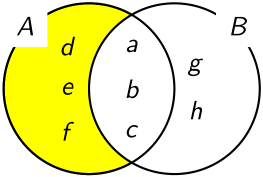
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき，
- $A - B = \{d, e, f\}$

オイラー図



「$A - B$」の代わりに「$A \setminus B$」と書くこともある

差集合：例

$$
\begin{aligned}
T &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 近代五輪が 3 回以上行われた国}\} \\
&= \{\text{アメリカ}, \text{イタリア}, \text{カナダ}, \text{スイス}, \text{日本}, \text{フランス}\} \\
A &= \{x \mid x \text{ は (2011 までに) 近代五輪が行われたアジアの国}\} \\
&= \{\text{韓国}, \text{中国}, \text{日本}\} \\
T - A &= \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} x \text{ は (2011 までに) 近代五輪が 3 回以上行われた} \\ \text{アジア以外の国} \end{array} \right\} \\
&= \{\text{アメリカ}, \text{イタリア}, \text{カナダ}, \text{スイス}, \text{フランス}\}
\end{aligned}
$$

補集合

補集合とは？

集合 A, B が $A \subseteq B$ を満たし，それが明白であるとき
A の**補集合**を

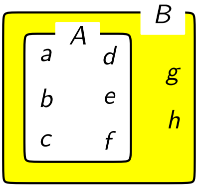
$$A^c = B - A$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ のとき，
- $A^c = \{g, h\}$

オイラー図



「A^c」の代わりに「$\overline{A}$」と書くこともある

空集合

空集合とは？

要素を持たない集合を空集合と呼び，「$\emptyset$」または「$\varnothing$」と表記する

注 1：空集合は「$\{\ \}$」とも書く

注 2：空集合の記号「$\emptyset$」と「$\varnothing$」はギリシャ文字「Φ」,「ϕ」と違う

空集合：例

$$
\begin{aligned}
T &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 近代五輪が 3 回以上行われた国}\} \\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, カナダ, 日本, フランス}\} \\
S &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 夏季オリンピックが開催された国}\} \\
&= \{\text{アメリカ, イギリス, イタリア, オーストラリア, オランダ,} \\
&\quad \text{カナダ, 韓国, ギリシャ, スウェーデン, スペイン, ソ連,} \\
&\quad \text{中国, ドイツ, 西ドイツ, 日本, フィンランド, フランス,} \\
&\quad \text{ベルギー, メキシコ}\} \\
T - S &= \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} x \text{ は (2011 年までに) 近代五輪を 3 回以上} \\ \text{行ったが，夏季五輪を行っていない国} \end{array} \right\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

定義の補足

共通部分とは？（再掲）

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

これは次と同じ「意味」

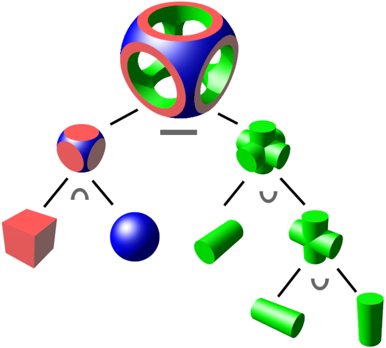
$x \in A \cap B$ であるとき，そのときに限り $(x \in A \text{ かつ } x \in B)$

同様な事項は，合併，差集合に対しても成り立つ

集合の演算の応用例：Constructive Solid Geometry

Constructive Solid Geometry

単純な物体に対して集合演算を適用することで，複雑な物体を表現するコンピュータ・グラフィクスの技法



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Csg_tree.png

目次

とりあえず，証明を見てみる

証明してみること (1)

集合 A, B **に対して，**

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

とりあえず，証明を見てみる

証明してみること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

証明：

- $x \in A \cap B$ と仮定する．
- 共通部分の定義より，$x \in A$ かつ $x \in B$．
- よって，$x \in A$ が成り立つ．
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成り立つ． $\square$

とりあえず，証明を見てみる

証明してみること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

証明：

- $x \in A \cap B$ と仮定する．
- 共通部分の定義より，$x \in A$ かつ $x \in B$．
- よって，$x \in A$ が成り立つ．
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成り立つ． □

疑問？

これは何？

オイラー図の与える直観

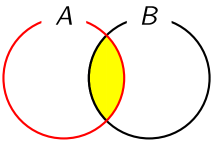
証明してみること (1)

集合 A, B **に対して，**

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

オイラー図を描いてみる



これは直観を与えるだけで，証明は論理に基づいて行う

証明とは？

証明とは？ (常識に基づく定義)

定義と前提に基づき，推論を重ねて，結論を導くこと

「結論を導く」とは？

「『前提』ならば『結論』」という命題が恒真命題であることを示すこと

証明とは？

証明とは？（常識に基づく定義）

定義と前提に基づき，推論を重ねて，結論を導くこと

「結論を導く」とは？

「『前提』ならば『結論』」という命題が恒真命題であることを示すこと

証明してみること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

これはどういう命題なのか？ 定義に戻って書き直す

- $\cap$ (共通部分) の定義に戻る
- $\subseteq$ (部分集合) の定義に戻る

証明の作り方：定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$A \cap B \subseteq A$$

証明の作り方：定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$A \cap B \subseteq A$$

それを $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in A \cap B$ **ならば** $x \in A$

証明の作り方：定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$A \cap B \subseteq A$$

それを $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in A \cap B$ **ならば** $x \in A$

それを $\cap$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ **かつ** $x \in B)$ **ならば** $x \in A$

証明の作り方：定義に基づいて書き直す (続)

書き直してできたもの (再掲)

$(x \in A$ **かつ** $x \in B)$ **ならば** $x \in A$

証明の作り方：定義に基づいて書き直す (続)

書き直してできたもの (再掲)

$$(x \in A \text{ かつ } x \in B) \text{ ならば } x \in A$$

ここで，命題変数 (のようなもの) P と Q を次のように置く

- $P =$ 「$x \in A$」
- $Q =$ 「$x \in B$」

「書き直してできたもの」を P と Q によって書き直したもの

$$(P \land Q) \to P$$

この命題論理式が恒真命題であることを示せばよい

証明の作り方：定義に基づいて書き直す (続)

書き直してできたもの (再掲)

$(x \in A$ **かつ** $x \in B)$ **ならば** $x \in A$

ここで，命題変数 (のようなもの) P と Q を次のように置く

- $P =$ 「$x \in A$」
- $Q =$ 「$x \in B$」

「書き直してできたもの」を P と Q によって書き直したもの

$$(P \land Q) \to P$$

この命題論理式が恒真命題であることを示せばよい

P	Q	$P \land Q$	$(P \land Q) \to P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

はじめの「そっけない証明」をもう一度見てみる

証明したいこと

$$A \cap B \subseteq A$$

証明：

- $x \in A \cap B$ と仮定する．
- 共通部分の定義より，$x \in A$ かつ $x \in B$．
- よって，$x \in A$ が成り立つ．
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成り立つ． □

ポイント

- 「定義に基づいて書き直す」ことを確かに行っている
  - しかし，どこで行っているのかは分かりにくい
- 恒真命題であることを示すために真理値表は書いていない
  - 実はこれが普通の方法 (次回の授業で)

今日の授業では「定義に基づいて書き直す」ことに主眼を置く

とりあえず，証明を見てみる：パート 2

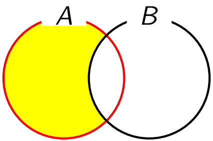
証明してみること (2)

集合 A, B に対して，

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

が成立する．

オイラー図から直観を得る



「証明してみること」を定義に基づいて書き直す

定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

それを $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$$x \in (A \cup B) - B \text{ ならば } x \in A$$

定義に基づいて書き直す (続)

「$x \in (A \cup B) - B$」を $-$ の定義に基づいて書き直したもの

$$x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin B$$

定義に基づいて書き直す (続)

「$x \in (A \cup B) - B$」を $-$ の定義に基づいて書き直したもの

$$x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin B$$

それを $\cup$ の定義に基づいて書き直したもの

$$(x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } x \notin B$$

定義に基づいて書き直す (続)

「$x \in (A \cup B) - B$」を $-$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in A \cup B$ **かつ** $x \notin B$

それを $\cup$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ **または** $x \in B)$ **かつ** $x \notin B$

それを $\notin$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ **または** $x \in B)$ **かつ** $(x \in B$ **ではない**$)$

定義に基づいて書き直す (続 2)

証明したいことを $\subseteq$，$-$，$\cup$，$\notin$ の定義に基づいて書き直したもの

$((x \in A$ **または** $x \in B)$ **かつ** $(x \in B$ **ではない**$))$ **ならば** $x \in A$

定義に基づいて書き直す (続 2)

証明したいことを $\subseteq$，$-$，$\cup$，$\notin$ の定義に基づいて書き直したもの

$((x \in A$ または $x \in B)$ かつ $(x \in B$ ではない$))$ ならば $x \in A$

ここで，命題変数 (のようなもの) P と Q を次のように置く

- $P =$ 「$x \in A$」
- $Q =$ 「$x \in B$」

「書き直したもの」を P と Q によって書き直したもの

$$((P \vee Q) \wedge \neg Q) \to P$$

この命題論理式が恒真命題であることを示せばよい

定義に基づいて書き直す (続 2)

証明したいことを $\subseteq$，$-$，$\cup$，$\notin$ の定義に基づいて書き直したもの

$((x \in A$ **または** $x \in B)$ **かつ** $(x \in B$ **ではない**$))$ **ならば** $x \in A$

ここで，命題変数 (のようなもの) P と Q を次のように置く

- $P =$ 「$x \in A$」
- $Q =$ 「$x \in B$」

「書き直したもの」を P と Q によって書き直したもの

$$((P \vee Q) \wedge \neg Q) \to P$$

この命題論理式が恒真命題であることを示せばよい

P	Q	$\neg Q$	$P \vee Q$	$((P \vee Q) \wedge \neg Q)$	$((P \vee Q) \wedge \neg Q) \to P$
T	T	F	T	F	T
T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	T

とりあえず，証明を見てみる：パート 3

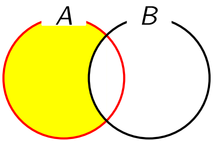
証明してみること (3)

集合 A, B に対して，

$$A - (A \cap B) = A - B$$

が成立する．

オイラー図から直観を得る



「証明してみること」を定義に基づいて書き直す

定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$A - (A \cap B) = A - B$$

定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$A - (A \cap B) = A - B$$

それを $=$ の定義に基づいて書き直したもの

$$A - (A \cap B) \subseteq A - B \text{ かつ } A - B \subseteq A - (A \cap B)$$

定義に基づいて書き直す (2)

「$A - (A \cap B) \subseteq A - B$」を $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in A - (A \cap B)$ ならば $x \in A - B$

定義に基づいて書き直す (2)

「$A-(A\cap B)\subseteq A-B$」を $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x\in A-(A\cap B)$ **ならば** $x\in A-B$

それを $-$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x\in A$ **かつ** $x\notin A\cap B)$ **ならば** $(x\in A$ **かつ** $x\notin B)$

定義に基づいて書き直す (2)

「$A - (A \cap B) \subseteq A - B$」を $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in A - (A \cap B)$ **ならば** $x \in A - B$

それを $-$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ **かつ** $x \notin A \cap B)$ **ならば** $(x \in A$ **かつ** $x \notin B)$

それを $\notin$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ **かつ** $(x \in A \cap B$ **ではない**$))$ **ならば** $(x \in A$ **かつ** $(x \in B$ **ではない**$))$

定義に基づいて書き直す (2)

「$A-(A\cap B)\subseteq A-B$」を $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x\in A-(A\cap B)$ **ならば** $x\in A-B$

それを $-$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x\in A$ **かつ** $x\notin A\cap B)$ **ならば** $(x\in A$ **かつ** $x\notin B)$

それを $\notin$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x\in A$ **かつ** $(x\in A\cap B$ **ではない**$))$ **ならば** $(x\in A$ **かつ** $(x\in B$ **ではない**$))$

それを $\cap$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x\in A$ **かつ** $((x\in A$ **かつ** $x\in B)$ **ではない**$))$ **ならば** $(x\in A$ **かつ** $(x\in B$ **ではない**$))$

定義に基づいて書き直す (3)

「$A - B \subseteq A - (A \cap B)$」を $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in A - B$ **ならば** $x \in A - (A \cap B)$

定義に基づいて書き直す (3)

「$A - B \subseteq A - (A \cap B)$」を $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in A - B$ **ならば** $x \in A - (A \cap B)$

それを $-$, $\notin$, $\cap$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ **かつ** $(x \in B$ **ではない**$))$ **ならば** $(x \in A$ **かつ** $((x \in A$ **かつ** $x \in B)$ **ではない**$))$

定義に基づいて書き直す (4)

証明したいことを $=$, $\subseteq$, $-$, $\notin$, $\cap$ の定義に基づいて書き直したもの

$((x \in A$ **かつ** $((x \in A$ **かつ** $x \in B)$ **ではない**$))$ **ならば** $(x \in A$ **かつ** $(x \in B$ **ではない**$)))$
かつ $((x \in A$ **かつ** $(x \in B$ **ではない**$))$ **ならば** $(x \in A$ **かつ** $((x \in A$ **かつ** $x \in B)$ **ではない**$)))$

定義に基づいて書き直す (4)

証明したいことを $=$, $\subseteq$, $-$, $\notin$, $\cap$ の定義に基づいて書き直したもの

$((x \in A$ **かつ** $((x \in A$ **かつ** $x \in B)$ **ではない**$))$ **ならば** $(x \in A$ **かつ** $(x \in B$ **ではない**$)))$ **かつ** $((x \in A$ **かつ** $(x \in B$ **ではない**$))$ **ならば** $(x \in A$ **かつ** $((x \in A$ **かつ** $x \in B)$ **ではない**$)))$

ここで，命題変数 (のようなもの) P と Q を次のように置く

- $P =$ 「$x \in A$」
- $Q =$ 「$x \in B$」

「書き直したもの」を P と Q によって書き直したもの

$$((P \wedge \neg(P \wedge Q)) \rightarrow (P \wedge \neg Q)) \wedge ((P \wedge \neg Q) \rightarrow (P \wedge \neg(P \wedge Q)))$$

この命題論理式が恒真命題であることを示せばよい

定義に基づいて書き直す (4)

証明したいことを $=$, $\subseteq$, $-$, $\notin$, $\cap$ の定義に基づいて書き直したもの

$((x \in A$ **かつ** $((x \in A$ **かつ** $x \in B)$ **ではない**$))$ **ならば** $(x \in A$ **かつ** $(x \in B$ **ではない**$)))$
かつ $((x \in A$ **かつ** $(x \in B$ **ではない**$))$ **ならば** $(x \in A$ **かつ** $((x \in A$ **かつ** $x \in B)$ **ではない**$)))$

ここで，命題変数 (のようなもの) P と Q を次のように置く

- $P =$ 「$x \in A$」
- $Q =$ 「$x \in B$」

「書き直したもの」を P と Q によって書き直したもの

$$((P \wedge \neg(P \wedge Q)) \to (P \wedge \neg Q)) \wedge ((P \wedge \neg Q) \to (P \wedge \neg(P \wedge Q)))$$

この命題論理式が恒真命題であることを示せばよい

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$P \wedge \neg(P \wedge Q)$	$(P \wedge \neg(P \wedge Q)) \to (P \wedge \neg Q)$	$(P \wedge \neg Q) \to (P \wedge \neg(P \wedge Q))$	$((P \wedge \neg(P \wedge Q)) \to (P \wedge \neg Q)) \wedge ((P \wedge \neg Q) \to (P \wedge \neg(P \wedge Q)))$
T	T	F	T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	T	T	T

目次

今日のまとめ

集合と集合の演算

- 集合の記述法 (要素を並べる，性質を定める)
- 部分集合の定義
- 共通部分，合併，差集合，補集合，空集合

集合に関する証明

- 「定義に基づいて書き直す」ことが今日の焦点
- 「推論を重ねる」ことは次回以降に説明

格言

「定義に基づいて書き直す」ことが証明の第一歩

集合の定義：補足

集合 (常識に基づく定義) 再掲

集合とはものの集まり

これを集合の定義だとすると，様々な「まずいこと」が起きると知られている

興味のある人は次のことばを調べてみる

- ラッセルのパラドックス　(「まずいこと」の例)
- 公理的集合論　(「まずいこと」の解決法)

この授業では，集合自身についてあまり深く考えないことにする

目次