# 離散数学 第 1 回
# 論理 (1)：命題論理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 4 月 10 日

最終更新：2012 年 4 月 11 日　10:57

## 概要

### 目標

**離散数学を通して**

- 数学における正しい用語法を身につけること
- 論理的な思考力を身につけること

### なぜ？

- 数学は理工学の「言語」 $\rightsquigarrow$
  正しい用語法の使用により，意志疎通が可能となる
- 思考は人間生活の「基礎」 $\rightsquigarrow$
  論理的思考の活用により，豊かな生活が可能となる

# スケジュール 前半 (予定)

1. 論理 (1) 命題論理 (4 月 10 日)
- ⋆ 休講 (健康診断) (4 月 17 日)
2. 集合 (1) 集合とは何か (4 月 24 日)
3. 論理 (2) 述語論理 (5 月 1 日)
4. 集合 (2) 集合演算など (5 月 8 日)
5. 集合 (3) 論理を用いた証明 (5 月 15 日)
6. 関数 (1) 関数，像と逆像 (5 月 22 日)
7. 関数 (2) 全射と単射 (5 月 29 日)

注意：予定の変更もありうる

# スケジュール 後半 (予定)

| | | |
|---|---|---|
| ⋆ | 休講 | (6 月 5 日) |
| 8 | 順序と同値関係 (1) 関係 | (6 月 12 日) |
| 9 | 順序と同値関係 (2) 順序関係 | (6 月 19 日) |
| ⋆ | 休講 | (6 月 26 日) |
| 10 | 順序と同値関係 (3) 同値関係 | (7 月 3 日) |
| 11 | 数学的帰納法 | (7 月 10 日) |
| 12 | 数学的帰納法と関係の閉包 | (7 月 17 日) |
| 13 | グラフと木 (1) グラフ | (7 月 24 日) |
| 14 | グラフと木 (2) 木 | (7 月 31 日？) |

注意：予定の変更もありうる

# 情報

**教員**

- **岡本 吉央** (**おかもと よしお**)
- **居室：西** 4 **号館** 2 **階** 206
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：**設定中**

**ティーチング・アシスタント** (TA)

- **小泉 雄貴** (**こいずみ ゆうき**)
- **居室：西** 4 **号館** 5 **階** 502 (**村松研究室**)
- E-mail：koizumi0836@gmail.com

**講義資料**

- Web：http://sites.google.com/site/yoshiookamotoy/discretemath
- **注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う**
- **講義前日の昼** 12 **時までに，ここに置かれる**

# 講義資料

**http://sites.google.com/site/yoshiookamotoy/discretemath**

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語集：よみがな，英訳付き

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

**http://video.fp.uec.ac.jp/**

- ビデオ

講義終了後，約 1 時間後に視聴可能

## 授業の進め方

講義 (60 分)

- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (30 分)

- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員とティーチング・アシスタントに質問する

退室 (0 分)

- 授業の感想などを小さな紙に書いて提出 (匿名可)

オフィスアワー：授業終了後

- 質問など

# 演習問題

**演習問題の進め方**

- 授業の後半 30 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

**演習問題の種類**

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加

# 評価

期末試験による

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 4 題は演習問題として提示されたものと同一である
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

## 格言

**格言 (三省堂 大辞林)**

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

**格言 (この講義における)**

講義内容とは直接関係ないかもしれないが，
私 (岡本) が重要だと思うこと

**格言 (の例)**

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

# 教科書・参考書

## 教科書

- 指定しない

## 全般的な参考書

- 離散数学の入門書で，
  集合，関数 (写像)，関係，数学的帰納法，グラフを扱ったもの
  - 石村園子,『やさしく学べる離散数学』，共立出版，2007 年
  - Seymour Lipschutz,『離散数学』，オーム社，1995 年
  - 中内伸光,『ろんりと集合』，日本評論社，2009 年
    (ただし，グラフは扱っていない)
  - など
- 証明の書き方の入門書
  - 松井知己,『だれでも証明が書ける』，日本評論社，2010 年
- その他の参考書
  - 授業の中で紹介

## この講義の約束

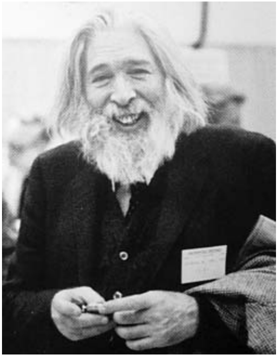
- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- 携帯電話は使わない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

# 目次

# 『パズルランドのアリス』から

**レイモンド・スマリヤン (著)，市場泰男 (訳)，**
**『パズルランドのアリス』，ハヤカワ文庫，2004 年**





http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Smullyan.html

# 『パズルランドのアリス』の第 55 問

## 『パズルランドのアリス』第 2 巻，18–19 ページより

- 「こんどは論理の問題じゃ」と白の女王さまがいいました。
- 「赤の王さまが眠っていらっしゃるときは、王さまが信じなさることはすべてまちがっている。
- つまり本当のことでないのじゃ。
- けれども、王さまが目を覚ましていらっしゃるときは、信じなさることはすべて本当なのじゃ。
- さて、昨日の晩のぴったり十時に、赤の王さまは、いまご自分も、また赤の女王さまも、眠っていると信じなさった。
- ではそのとき、赤の女王さまは、眠っていらっしゃったか、それとも目をさましていらっしゃったか、どうじゃ？」

あとで，このパズルを解く

# 目次

# 命題と真偽

**命題とは？（常識に基づいた定義）**

真偽を定められる文，あるいは，その内容

例：トランプでゲームをしているような状況で

- 「一郎はハートの 4 を持っている」
- 「二郎はクラブの Q を持っている」

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真〇
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である　偽〇

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真◯
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である　偽◯
- 2012 年は寅年ですか？

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真◯
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である 偽◯
- 2012 年は寅年ですか？ ×

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である 偽○
- 2012 年は寅年ですか？ ×
- 2012 年は寅年です

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である　偽○
- 2012 年は寅年ですか？　×
- 2012 年は寅年です　偽○

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である 偽○
- 2012 年は寅年ですか？ ×
- 2012 年は寅年です 偽○
- やったー！

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である　偽○
- 2012 年は寅年ですか？　×
- 2012 年は寅年です　偽○
- やったー！　×

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真〇
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である 偽〇
- 2012 年は寅年ですか？ ×
- 2012 年は寅年です 偽〇
- やったー！ ×
- ロンドンオリンピックでは金メダルを取ります

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真◯
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である　偽◯
- 2012 年は寅年ですか？　×
- 2012 年は寅年です　偽◯
- やったー！　×
- ロンドンオリンピックでは金メダルを取ります　×

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である　真○
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である　偽○
- 2012 年は寅年ですか？　×
- 2012 年は寅年です　偽○
- やったー！　×
- ロンドンオリンピックでは金メダルを取ります　×
- 調布市は広い

## 命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である 真○
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である 偽○
- 2012 年は寅年ですか？ ×
- 2012 年は寅年です 偽○
- やったー！ ×
- ロンドンオリンピックでは金メダルを取ります ×
- 調布市は広い ×

# 真偽の表現いろいろ

**真理値とは？**

「真」か「偽」という値

| 真 | 偽 |
|---|---|
| true | false |
| T | F |
| 1 | 0 |

**以降,「真と偽」か「T と F」を用いていく**

# 目次

# 記号論理

**命題変数 (常識に基づいた定義)**

命題を記号で表したもの

例：トランプでゲームをしているような状況で

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」

# 命題から別の命題を得ること

## 例

- 2 つの命題
  - $P$ =「一郎はハートの 4 を持っている」
  - $Q$ =「二郎はクラブの Q を持っている」

  の真偽から，次の命題
  - 「一郎はハートの 4 を持っていない」
  - 「一郎と二郎のどちらかはクラブの Q を持っている」

  の真偽は決定される
- つまり，
  命題から別の命題が得られ，その真偽が決まることがある

## 今からやること

そのような「別の命題の得られ方」と「その真偽の決まり方」を見る

# 否定

**否定 (常識に基づいた定義)**

**命題 $P$ の否定とは，$P$ の真偽を反転させた命題「$\neg P$」と表記する**

**「$\neg P$」を「$\sim P$」,「$\overline{P}$」とも表記する**

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

**例**

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」のとき
- $\neg P =$「一郎はハートの 4 を持っていない」

## 連言

**連言 (常識に基づいた定義)**

命題 $P$ と $Q$ の**連言**とは，$P$ と $Q$ がともに真であるとき，そのときのみ真である命題．「$P \wedge Q$」と表記する

「連言」を「論理積」,「AND」ともいう

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

**例**

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \wedge Q =$ 「一郎はハートの 4 を持っていて，**かつ**，二郎はクラブの Q を持っている」

# 選言

**選言 (常識に基づいた定義)**

命題 $P$ と $Q$ の**選言**とは，$P$ か $Q$ が真であるとき，そのときのみ真である命題．「$P \vee Q$」と表記する

「選言」を「論理和」,「OR」ともいう

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

**例**

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \vee Q =$ 「一郎がハートの 4 を持っているか，**または**，二郎がクラブの Q を持っている」

# 含意

## 含意 (常識に基づいた定義)

命題 $P$ から $Q$ への**含意**とは，$P$ が真，$Q$ が偽であるとき，そのときのみ偽である命題．「$P \to Q$」と表記する

「$P \to Q$」を「$P \supset Q$」とも書く

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

**例**

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \to Q =$ 「一郎がハートの 4 を持っている**ならば**，二郎はクラブの Q を持っている」

## 同値

### 同値 (常識に基づいた定義)

命題 $P$ と $Q$ の**同値**とは，$P$ と $Q$ の真理値が等しいとき，そのときのみ真である命題.「$P \leftrightarrow Q$」と表記する

「$P \leftrightarrow Q$」を「$P \equiv Q$」とも書く

| $P$ | $Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

### 例

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \leftrightarrow Q =$ 「一郎がハートの 4 を持っている**とき**，**そのときに限り**，二郎はクラブの Q を持っている」

## 日本語との対応：例

**否定**：$\neg P$

- $P$ ではない

**連言**：$P \wedge Q$

- $P$ かつ $Q$
- $P$ であり，同時に，$Q$ でもある

**選言**：$P \vee Q$

- $P$ または $Q$
- $P$ あるいは $Q$
- $P$ であるか，そうでなければ，$Q$ である

**含意**：$P \to Q$

- $P$ ならば $Q$
- $P$ であるとき，$Q$ でなければならない

**同値**：$P \leftrightarrow Q$

- $P$ であるとき，そのときに限り $Q$ である
- $P$ と $Q$ は同値である

# 命題論理式

**演算がいろいろあるので...**

**演算を組み合わせて，複雑な命題を表現できる**

**例**：$(P \to \neg Q) \land \neg(\neg P \leftrightarrow (R \lor Q))$

**命題論理式 (常識に基づく定義)**

**命題論理式とは，命題を表す変数 (命題変数) と命題の演算 $\neg$，$\land$，$\lor$，$\to$，$\leftrightarrow$ を意味を成すように組み合わせたもの (命題論理式も命題を表す)**

**命題論理式でないものの例**：$P \lor \land \lor Q$，$P \to (Q + R)$

## 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

**命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える**

- **この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？**

| $P$ | $Q$ | | | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | | | **?** |
| T | F | | | **?** |
| F | T | | | **?** |
| F | F | | | **?** |

# 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？
- これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意
  $\therefore$ 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば
  「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | | | ? |
| T | F | | | ? |
| F | T | | | ? |
| F | F | | | ? |

# 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？
- これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意
  $\therefore$ 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば
  「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる
- 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽は分かる

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | | | ? |
| T | F | | | ? |
| F | T | | | ? |
| F | F | | | ? |

# 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？
- これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意
  $\therefore$ 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば
  「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる
- 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽は分かる

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | | | ? |
| T | F | | | ? |
| F | T | | | ? |
| F | F | | | ? |
| ↑ | ↑ | ↑ | | |

## 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？
- これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意
  $\therefore$ 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば
  「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる
- 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽は分かる

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | | **?** |
| T | F | F | | **?** |
| F | T | T | | **?** |
| F | F | T | | **?** |
| ↑ | ↑ | ↑ | | |

## 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

**命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える**

- **この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？**
- **これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意**
  **$\therefore$ 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば**
  **「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる**
- **「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽は分かる**

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | | **?** |
| T | F | F | | **?** |
| F | T | T | | **?** |
| F | F | T | | **?** |

# 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？
- これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意
  $\therefore$ 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば
  「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる
- 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽は分かる

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | | ? |
| T | F | F | | ? |
| F | T | T | | ? |
| F | F | T | | ? |
| | ↑ | | ↑ | |

# 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

**命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える**

- **この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？**
- **これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意**
  $\therefore$ **「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば**
  **「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる**
- **「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽は分かる**

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | **?** |
| T | F | F | T | **?** |
| F | T | T | F | **?** |
| F | F | T | T | **?** |
| | ↑ | | ↑ | |

# 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？
- これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意
  $\therefore$ 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば
  「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる
- 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽は分かる

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | ? |
| T | F | F | T | ? |
| F | T | T | F | ? |
| F | F | T | T | ? |

## 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

**命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える**

- **この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？**
- **これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意**
  $\therefore$ **「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば**
  **「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる**
- **「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽は分かる**

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | **?** |
| T | F | F | T | **?** |
| F | T | T | F | **?** |
| F | F | T | T | **?** |
| | | ↑ | ↑ | ↑ |

## 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

**命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える**

- **この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？**
- **これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意**
  $\therefore$ **「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば**
  **「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる**
- **「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽は分かる**

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F |
| T | F | F | T | T |
| F | T | T | F | F |
| F | F | T | T | T |
| | | ↑ | ↑ | ↑ |

## 命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

**命題変数 $P$ と $Q$ を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える**

- **この式の真偽は $P$ と $Q$ の真偽から決まるけど，どのように？**
- **これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意**
  $\therefore$ **「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば**
  **「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる**
- **「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽は分かる**

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $(P \to Q) \to \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F |
| T | F | F | T | T |
| F | T | T | F | F |
| F | F | T | T | T |

**↑これを「真理値表」と呼ぶ**

# 真理値表による分析：例 1

命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

| $P$ | $Q$ | | | | $\neg(P \land (Q \lor \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | | | | |
| T | F | | | | |
| F | T | | | | |
| F | F | | | | |

# 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | | | $P \wedge (Q \vee \neg P)$ | $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | | | | |
| T | F | | | | |
| F | T | | | | |
| F | F | | | | |

## 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | | $Q \vee \neg P$ | $P \wedge (Q \vee \neg P)$ | $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | | | | |
| T | F | | | | |
| F | T | | | | |
| F | F | | | | |

## 真理値表による分析：例 1

命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \vee \neg P$ | $P \wedge (Q \vee \neg P)$ | $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | | | | |
| T | F | | | | |
| F | T | | | | |
| F | F | | | | |

# 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \lor \neg P$ | $P \land (Q \lor \neg P)$ | $\neg(P \land (Q \lor \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | | | | |
| T | F | | | | |
| F | T | | | | |
| F | F | | | | |
| ↑ | | ↑ | | | |

# 真理値表による分析：例 1

命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \vee \neg P$ | $P \wedge (Q \vee \neg P)$ | $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | | | |
| T | F | F | | | |
| F | T | T | | | |
| F | F | T | | | |
| $\uparrow$ | | $\uparrow$ | | | |

## 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \vee \neg P$ | $P \wedge (Q \vee \neg P)$ | $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | | | |
| T | F | F | | | |
| F | T | T | | | |
| F | F | T | | | |

# 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \lor \neg P$ | $P \land (Q \lor \neg P)$ | $\neg(P \land (Q \lor \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | | | |
| T | F | F | | | |
| F | T | T | | | |
| F | F | T | | | |
| | ↑ | ↑ | ↑ | | |

# 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して,「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \vee \neg P$ | $P \wedge (Q \vee \neg P)$ | $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | | |
| T | F | F | F | | |
| F | T | T | T | | |
| F | F | T | T | | |
| | ↑ | ↑ | ↑ | | |

## 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \vee \neg P$ | $P \wedge (Q \vee \neg P)$ | $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | | |
| T | F | F | F | | |
| F | T | T | T | | |
| F | F | T | T | | |

# 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \vee \neg P$ | $P \wedge (Q \vee \neg P)$ | $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | | |
| T | F | F | F | | |
| F | T | T | T | | |
| F | F | T | T | | |
| ↑ | | | ↑ | ↑ | |

# 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して,「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \lor \neg P$ | $P \land (Q \lor \neg P)$ | $\neg(P \land (Q \lor \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | |
| T | F | F | F | F | |
| F | T | T | T | F | |
| F | F | T | T | F | |
| ↑ | | | ↑ | ↑ | |

# 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \land (Q \lor \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \lor \neg P$ | $P \land (Q \lor \neg P)$ | $\neg(P \land (Q \lor \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | |
| T | F | F | F | F | |
| F | T | T | T | F | |
| F | F | T | T | F | |

## 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \vee \neg P$ | $P \wedge (Q \vee \neg P)$ | $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | |
| T | F | F | F | F | |
| F | T | T | T | F | |
| F | F | T | T | F | |
| | | | | ↑ | ↑ |

## 真理値表による分析：例 1

**命題変数 $P, Q$ に対して，「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \vee \neg P$ | $P \wedge (Q \vee \neg P)$ | $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | F |
| T | F | F | F | F | T |
| F | T | T | T | F | T |
| F | F | T | T | F | T |
| | | | | ↑ | ↑ |

# 真理値表による分析：例 2

**命題変数** $P, Q, R$ **に対して，「**$(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$**」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | | | | $(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | | | | |
| T | T | F | | | | |
| T | F | T | | | | |
| T | F | F | | | | |
| F | T | T | | | | |
| F | T | F | | | | |
| F | F | T | | | | |
| F | F | F | | | | |

# 真理値表による分析：例 2

命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

| $P$ | $Q$ | $R$ | | | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | | | | | |
| T | T | F | | | | | |
| T | F | T | | | | | |
| T | F | F | | | | | |
| F | T | T | | | | | |
| F | T | F | | | | | |
| F | F | T | | | | | |
| F | F | F | | | | | |

# 真理値表による分析：例 2

**命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \rightarrow R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \rightarrow R$ | $(P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \rightarrow R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | | | | | |
| T | T | F | | | | | |
| T | F | T | | | | | |
| T | F | F | | | | | |
| F | T | T | | | | | |
| F | T | F | | | | | |
| F | F | T | | | | | |
| F | F | F | | | | | |

# 真理値表による分析：例 2

**命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | | | | | |
| T | T | F | | | | | |
| T | F | T | | | | | |
| T | F | F | | | | | |
| F | T | T | | | | | |
| F | T | F | | | | | |
| F | F | T | | | | | |
| F | F | F | | | | | |
| ↑ | ↑ | | ↑ | | | | |

# 真理値表による分析：例 2

命題変数 $P, Q, R$ に対して,「$(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | | | | |
| T | T | F | T | | | | |
| T | F | T | F | | | | |
| T | F | F | F | | | | |
| F | T | T | F | | | | |
| F | T | F | F | | | | |
| F | F | T | T | | | | |
| F | F | F | T | | | | |
| ↑ | ↑ | | ↑ | | | | |

# 真理値表による分析：例 2

**命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | | | | |
| T | T | F | T | | | | |
| T | F | T | F | | | | |
| T | F | F | F | | | | |
| F | T | T | F | | | | |
| F | T | F | F | | | | |
| F | F | T | T | | | | |
| F | F | F | T | | | | |

# 真理値表による分析：例 2

**命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | | | | |
| T | T | F | T | | | | |
| T | F | T | F | | | | |
| T | F | F | F | | | | |
| F | T | T | F | | | | |
| F | T | F | F | | | | |
| F | F | T | T | | | | |
| F | F | F | T | | | | |
| | ↑ | ↑ | | ↑ | | | |

## 真理値表による分析：例 2

**命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | | | |
| T | T | F | T | F | | | |
| T | F | T | F | F | | | |
| T | F | F | F | T | | | |
| F | T | T | F | T | | | |
| F | T | F | F | F | | | |
| F | F | T | T | F | | | |
| F | F | F | T | T | | | |
| | ↑ | ↑ | | ↑ | | | |

# 真理値表による分析：例 2

命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | | | |
| T | T | F | T | F | | | |
| T | F | T | F | F | | | |
| T | F | F | F | T | | | |
| F | T | T | F | T | | | |
| F | T | F | F | F | | | |
| F | F | T | T | F | | | |
| F | F | F | T | T | | | |

# 真理値表による分析：例 2

**命題変数 $P, Q, R$ に対して,「$(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | | | |
| T | T | F | T | F | | | |
| T | F | T | F | F | | | |
| T | F | F | F | T | | | |
| F | T | T | F | T | | | |
| F | T | F | F | F | | | |
| F | F | T | T | F | | | |
| F | F | F | T | T | | | |
| ↑ | | ↑ | | | ↑ | | |

# 真理値表による分析：例 2

**命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | | |
| T | T | F | T | F | F | | |
| T | F | T | F | F | T | | |
| T | F | F | F | T | F | | |
| F | T | T | F | T | T | | |
| F | T | F | F | F | T | | |
| F | F | T | T | F | T | | |
| F | F | F | T | T | T | | |
| $\uparrow$ | | $\uparrow$ | | | $\uparrow$ | | |

# 真理値表による分析：例 2

**命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | | |
| T | T | F | T | F | F | | |
| T | F | T | F | F | T | | |
| T | F | F | F | T | F | | |
| F | T | T | F | T | T | | |
| F | T | F | F | F | T | | |
| F | F | T | T | F | T | | |
| F | F | F | T | T | T | | |

# 真理値表による分析：例 2

**命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | | |
| T | T | F | T | F | F | | |
| T | F | T | F | F | T | | |
| T | F | F | F | T | F | | |
| F | T | T | F | T | T | | |
| F | T | F | F | F | T | | |
| F | F | T | T | F | T | | |
| F | F | F | T | T | T | | |
| | | | ↑ | ↑ | | ↑ | |

# 真理値表による分析：例 2

命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$」 を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | |
| T | T | F | T | F | F | T | |
| T | F | T | F | F | T | F | |
| T | F | F | F | T | F | T | |
| F | T | T | F | T | T | T | |
| F | T | F | F | F | T | F | |
| F | F | T | T | F | T | T | |
| F | F | F | T | T | T | T | |
| | | | ↑ | ↑ | | ↑ | |

# 真理値表による分析：例 2

**命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | |
| T | T | F | T | F | F | T | |
| T | F | T | F | F | T | F | |
| T | F | F | F | T | F | T | |
| F | T | T | F | T | T | T | |
| F | T | F | F | F | T | F | |
| F | F | T | T | F | T | T | |
| F | F | F | T | T | T | T | |

# 真理値表による分析：例 2

**命題変数 $P, Q, R$ に対して,「$(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$」を考える**

- **この命題論理式の真理値表は以下の通り**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \land ((P \leftrightarrow Q) \lor (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | |
| T | T | F | T | F | F | T | |
| T | F | T | F | F | T | F | |
| T | F | F | F | T | F | T | |
| F | T | T | F | T | T | T | |
| F | T | F | F | F | T | F | |
| F | F | T | T | F | T | T | |
| F | F | F | T | T | T | T | |
| | | | | | ↑ | ↑ | ↑ |

## 真理値表による分析：例 2

命題変数 $P, Q, R$ に対して，「$(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \leftrightarrow Q$ | $R \leftrightarrow Q$ | $P \to R$ | $(P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q)$ | $(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | F | T | F |
| T | F | T | F | F | T | F | F |
| T | F | F | F | T | F | T | F |
| F | T | T | F | T | T | T | T |
| F | T | F | F | F | T | F | F |
| F | F | T | T | F | T | T | T |
| F | F | F | T | T | T | T | T |
| | | | | | ↑ | ↑ | ↑ |

## 真理値表による分析：書くときの注意

- 場合に漏れがないように
- 1 つの演算について 1 つの列を作るように
- 規則を当てはめた結果が右側に来るように
- 一方，罫線は引いても引かなくてもよい (もっと引いてもよい)

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $Q \lor \neg P$ | $P \land (Q \lor \neg P)$ | $\neg(P \land (Q \lor \neg P))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | F |
| T | F | F | F | F | T |
| F | T | T | T | F | T |
| F | F | T | T | F | T |

# 目次

# 『パズルランドのアリス』の第 55 問 (再掲)

## 『パズルランドのアリス』第 2 巻，18–19 ページより

- 「こんどは論理の問題じゃ」と白の女王さまがいいました。
- 「赤の王さまが眠っていらっしゃるときは、
王さまが信じなさることはすべてまちがっている。
- つまり本当のことでないのじゃ。
- けれども、王さまが目を覚ましていらっしゃるときは、
信じなさることはすべて本当なのじゃ。
- さて、昨日の晩のぴったり十時に、赤の王さまは、
いまご自分も、また赤の女王さまも、眠っていると信じなさった。
- ではそのとき、赤の女王さまは、眠っていらっしゃったか、それとも
目をさましていらっしゃったか、どうじゃ？」

## 論理によるモデル化

**命題記号を導入**

- $P =$ 赤の王さまが眠っている
- $Q =$ 赤の女王さまが眠っている

**各命題を命題論理式として記述**

- 王さまが信じていることは「$P \wedge Q$」
- 王さまのキャラクターから「$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$」
- 知りたいことは「$Q$」

**つまり，**

- 「$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$」を真とする「$Q$」は何？

## 真理値表

| $P$ | $Q$ | $P \land Q$ | $\neg(P \land Q)$ | $P \leftrightarrow \neg(P \land Q)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F |
| T | F | F | T | T |
| F | T | F | T | F |
| F | F | F | T | F |

**つまり，**

- **「$P \leftrightarrow \neg(P \land Q)$」が真となるのは，「$Q$」が偽のときのみ**
- **よって，赤の女王さまは眠っていない**

# 目次

# 恒真命題

**恒真命題 (トートロジー) とは？**

**命題変数にどのような真理値が割り当てられても，常に真となる命題論理式**

**例：「$P \to (Q \to P)$」は恒真命題**

| $P$ | $Q$ | $Q \to P$ | $P \to (Q \to P)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | T | T |
| F | T | F | T |
| F | F | T | T |

# 重要な恒真命題：含意の除去

## 含意の除去

命題変数 $P, Q$ に対して，次の命題論理式は恒真命題

$$(P \to Q) \quad \leftrightarrow \quad (\neg P \lor Q)$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \to Q$ | $\neg P \lor Q$ | $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \lor Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T |
| F | T | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T | T |

$\square$

証明終了のしるし↑

# 重要な恒真命題：同値の除去

## 同値の除去

命題変数 $P, Q$ に対して，次の命題論理式は恒真命題

$$(P \leftrightarrow Q) \quad \leftrightarrow \quad ((P \to Q) \land (Q \to P))$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

| $P$ | $Q$ | $P \leftrightarrow Q$ | $P \to Q$ | $Q \to P$ | $(P \to Q) \land (Q \to P)$ | $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \land (Q \to P))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F | T |
| F | T | F | T | F | F | T |
| F | F | T | T | T | T | T |

□

# 重要な恒真命題：排中法則

**排中法則**

命題変数 $P$ に対して，次の命題論理式は恒真命題

$$P \vee \neg P$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

| $P$ | $\neg P$ | $P \vee \neg P$ |
|---|---|---|
| T | F | T |
| F | T | T |

□

# 重要な恒真命題：ド・モルガンの法則

## ド・モルガンの法則

命題変数 $P, Q$ に対して，次の 2 つの命題論理式は恒真命題

$$
\begin{aligned}
(\neg(P \vee Q)) &\leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \\
(\neg(P \wedge Q)) &\leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)
\end{aligned}
$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg P \wedge \neg Q$ | $P \vee Q$ | $\neg(P \vee Q)$ | $(\neg(P \vee Q)) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | F | T | F | T |
| T | F | F | T | F | T | F | T |
| F | T | T | F | F | T | F | T |
| F | F | T | T | T | F | T | T |

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg P \vee \neg Q$ | $P \wedge Q$ | $\neg(P \wedge Q)$ | $(\neg(P \wedge Q)) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | F | T | F | T |
| T | F | F | T | T | F | T | T |
| F | T | T | F | T | F | T | T |
| F | F | T | T | T | F | T | T |

□

## 重要な恒真命題：モードゥス・ポネンス

### モードゥス・ポネンス

命題変数 $P, Q$ に対して，次の命題論理式は恒真命題

$$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $P \wedge (P \to Q)$ | $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T |
| F | T | T | F | T |
| F | F | T | F | T |

□

# 重要な恒真命題：対偶法則

## 対偶法則

命題変数 $P, Q$ に対して，次の命題論理式は恒真命題

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg Q$ | $\neg P$ | $\neg Q \to \neg P$ | $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F | T | T |
| T | F | F | T | F | F | T |
| F | T | T | F | T | T | T |
| F | F | T | T | T | T | T |

□

# 恒真命題いろいろ (1)

## 冪等法則

$$(P \wedge P) \leftrightarrow P$$

$$(P \vee P) \leftrightarrow P$$

## 吸収法則

$$((P \wedge Q) \vee P) \leftrightarrow P$$

$$((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow P$$

## 交換法則

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$$

$$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$$

## 二重否定の除去

$$P \leftrightarrow \neg(\neg P)$$

## 結合法則

$$((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$$

$$((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$$

# 恒真命題いろいろ (2)

## 分配法則

$$((P \vee Q) \wedge R) \leftrightarrow ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$$

$$((P \wedge Q) \vee R) \leftrightarrow ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$$

## 定数の除去

$$(P \wedge \mathrm{T}) \leftrightarrow P$$

$$(P \vee \mathrm{F}) \leftrightarrow P$$

## 変数の除去

$$(P \wedge \mathrm{F}) \leftrightarrow \mathrm{F}$$

$$(P \vee \mathrm{T}) \leftrightarrow \mathrm{T}$$

## 含意の合成

$$((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R))$$

## 三段論法

$$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

## 恒真命題の利用法

- 恒真命題を使って，命題論理式を簡略化できる (見た目を単純にできる)
- 恒真命題を使って，数学的な証明ができる

これらのついては後の講義で扱う...

## 目次

# 今日のまとめ

## 命題とその真偽

- 命題：「真」か「偽」が定まる文

## 命題論理式と真理値表

- 命題論理式：命題を組み合わせて得られた命題
- 真理値表：命題論理式の真偽を分析する道具

## 恒真命題

- 恒真命題：命題変数の真偽が何であっても常に真となる命題論理式
- 恒真命題であることの証明：真理値表を書き下す
- 恒真命題の利用法：次回以降

## 格言

論理は思考をまとめる道具

## 補足

**この講義で扱うのは「論理学」ではない！**

- 後の授業で必要なことだけを扱った (「論理学を使う」という立場)
- そのため，常識に基づいて論理学のさわりを見た
- ちゃんとした「論理学」については別の機会に勉強を

**「論理学」自体に興味がある場合は，以下の本を推薦**

- レイモンド・スマリヤン (著)，田中 朋之，長尾 確 (訳),『スマリヤンの決定不能の論理パズル』，白揚社，2008 年．
- 戸田山 和久,『論理学をつくる』，名古屋大学出版会，2000 年．

## 残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

# 目次