離散数学 第 13 回
グラフ

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 7 月 31 日

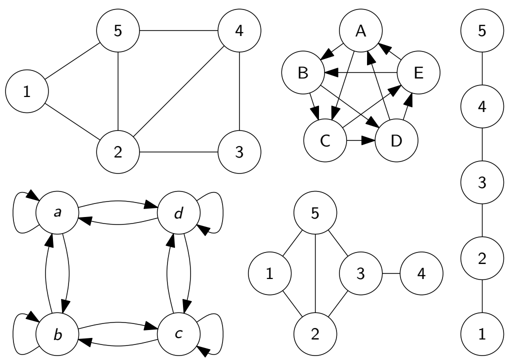
最終更新：2013 年 8 月 25 日　21:53

概要

今日の目標
- グラフの定義を理解する
- グラフの同型性を理解し，同型であるか判定できるようになる

目次

グラフの例



有向グラフ

有向グラフとは？

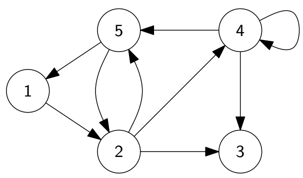
有向グラフとは，順序対 (V, A) で，
- V は集合
- $A \subseteq V \times V$ は V の順序対の集合

であるもののこと

例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

有向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

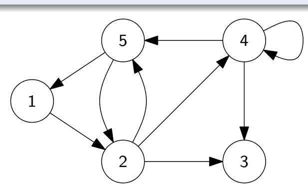


有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフの用語
- V の要素を G の**頂点**と呼ぶ
- V を G の**頂点集合**と呼ぶ
- A の要素を G の**弧**と呼ぶ
- A を G の**弧集合**と呼ぶ
- 弧 $(u, v) \in A$ に対して，u はその**始点**であり，v はその**終点**である

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- 頂点 2 は弧 $(2, 3)$ の始点，頂点 3 は弧 $(2, 3)$ の終点



無向グラフ

無向グラフとは？

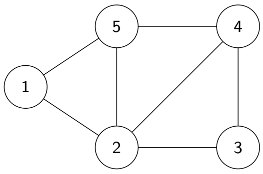
無向グラフとは，順序対 (V, E) で，
- V は集合
- $E \subseteq 2^V$ は V の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

無向グラフの図示

- $V = \{1,2,3,4,5\}$
- $E = \{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{4,5\}\}$

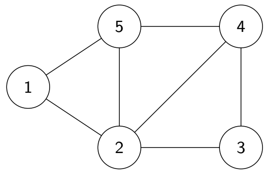


無向グラフの用語

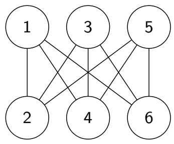
無向グラフ $G = (V, E)$

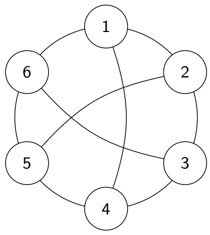
無向グラフの用語
- V の要素を G の**頂点**と呼ぶ
- E の要素を G の**辺**と呼ぶ
- V を G の**頂点集合**と呼ぶ
- E を G の**辺集合**と呼ぶ
- 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，u, v をその**端点**と呼ぶ

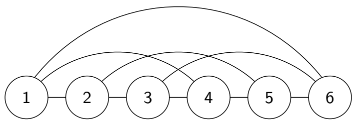
- $V = \{1,2,3,4,5\}$
- $E = \{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},$ $\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},$ $\{4,5\}\}$
- 頂点 $2, 3$ は辺 $\{2,3\}$ の端点



1 つのグラフに対するいろいろな図示



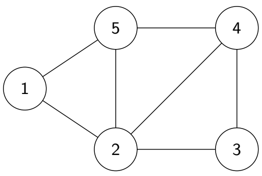


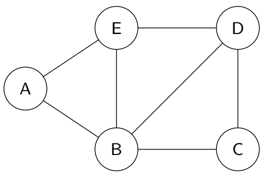


目次

「同じ」グラフとは？ (1)

次の 2 つのグラフを見てみる





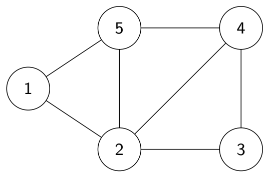
- 頂点同士の「つながり方」は同じである
- しかし，頂点集合，辺集合は異なる
- したがって，この 2 つは「同じグラフではない」

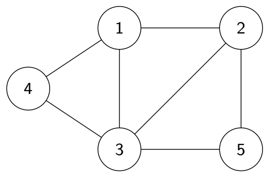
でも「同じであると見なしたい」

そうなるような同値関係を与えてみる

「同じ」グラフとは？ (2)

次の 2 つのグラフを見てみる





- 頂点同士の「つながり方」は同じである
- しかし，辺集合は異なる
- したがって，この 2 つは「同じグラフではない」

でも「同じであると見なしたい」

そうなるような同値関係を与えてみる

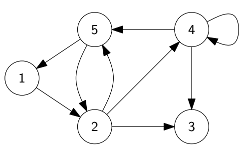
同型写像 (有向グラフの場合)

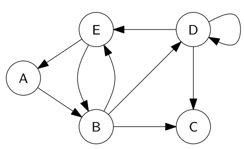
2 つの有向グラフ $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$

同型写像とは？

G_1 から G_2 への**同型写像**とは，全単射 $\varphi\colon V_1 \to V_2$ で次を満たすもの
- 任意の頂点 $u, v \in V_1$ に対して，

$$(u, v) \in A_1 \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$$





$\varphi(1) = \mathrm{A}, \varphi(2) = \mathrm{B}, \varphi(3) = \mathrm{C}, \varphi(4) = \mathrm{D}, \varphi(5) = \mathrm{E}$

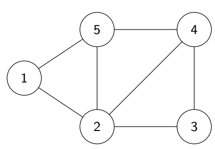
同型写像 (無向グラフの場合)

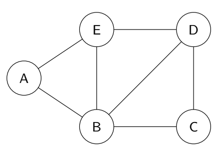
2 つの無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

同型写像とは？

G_1 から G_2 への**同型写像**とは，全単射 $\varphi\colon V_1 \to V_2$ で次を満たすもの
- 任意の頂点 $u, v \in V_1$ に対して，

$$\{u, v\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$





$\varphi(1) = \mathrm{A}, \varphi(2) = \mathrm{B}, \varphi(3) = \mathrm{C}, \varphi(4) = \mathrm{D}, \varphi(5) = \mathrm{E}$

同型なグラフ

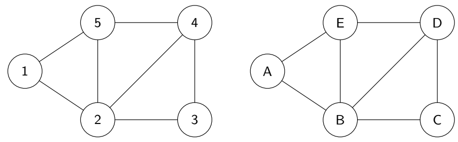
同型なグラフとは？

G_1 から G_2 への同型写像が存在するとき，
G_1 と G_2 は**同型**であるといい，

$$G_1 \simeq G_2$$

と書き表す

次の 2 つのグラフは同型



同型である，という関係は同値関係

Γ を「すべての無向グラフを要素として持つ集合」とする

- 「$\simeq$」は Γ 上の関係

$\simeq$ の重要な性質

$\simeq$ は Γ 上の同値関係

つまり，$\simeq$ は次の 3 つの性質を満たす

- 任意の $G \in \Gamma$ に対して，$G \simeq G$ (反射性)
- 任意の $G_1, G_2 \in \Gamma$ に対して，$G_1 \simeq G_2$ ならば $G_2 \simeq G_1$ (対称性)
- 任意の $G_1, G_2, G_3 \in \Gamma$ に対して，$G_1 \simeq G_2$ かつ $G_2 \simeq G_3$ ならば $G_1 \simeq G_3$ (推移性)

$\simeq$ の反射性：証明 (1)

証明すべきこと

任意の無向グラフ G に対して，$G \simeq G$

定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，同型写像 $\varphi \colon V \to V$ が存在する

さらに，定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，全単射 $\varphi \colon V \to V$ で次を満たすものが存在する

- 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して，

$$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E$$

証明の方針：そのような全単射 φ を実際に構成する

$\simeq$ の反射性：証明 (2)

- 任意の無向グラフ G に対して，G から G への同型写像が存在することを証明すればよい．
- すなわち，任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，全単射 $\varphi \colon V \to V$ で次を満たすものが存在することを証明すればよい．
  - 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して，

$$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E.$$

- そのような全単射として，恒等関数 $\mathrm{id}_V \colon V \to V$ を考える．
- このとき，任意の頂点 $u, v \in V$ に対して

$$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathrm{id}_V(u), \mathrm{id}_V(v)\} \in E$$

である．
- したがって，id_V は G から G への同型写像である． $\square$

$\simeq$ の対称性と推移性の証明は演習問題

対称性に関するヒント

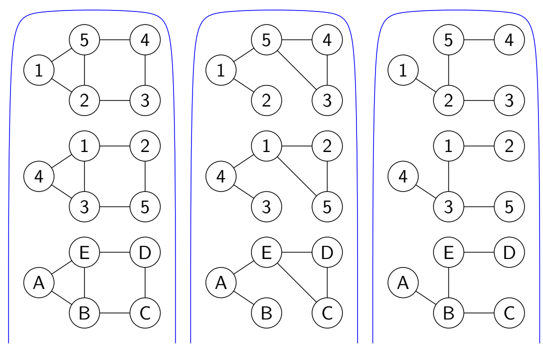
- 無向グラフ G_1, G_2 に対して，G_1 から G_2 への同型写像 φ が存在すると仮定する
- φ は全単射なので，逆関数 φ^{-1} が存在し，それも全単射 (補足問題 8.5 参照)
- φ^{-1} が G_2 から G_1 への同型写像になることを証明すればよい

推移性に関するヒント

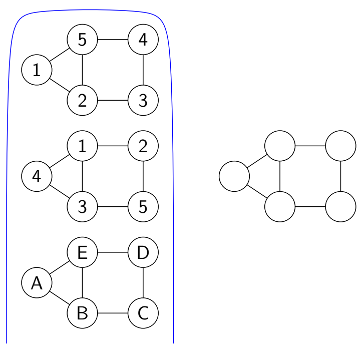
- 無向グラフ G_1, G_2, G_3 に対して，G_1 から G_2 への同型写像 φ_1 と G_2 から G_3 への同型写像 φ_2 が存在すると仮定する
- 合成関数 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ を考えると，φ_1, φ_2 が全単射なので，これも全単射 (演習問題参照)
- $\varphi_2 \circ \varphi_1$ が G_1 から G_3 への同型写像になることを証明すればよい

グラフの同型類

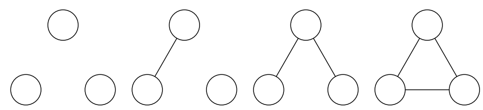
商集合 $\Gamma/\simeq$ の要素をグラフの**同型類**と呼ぶ



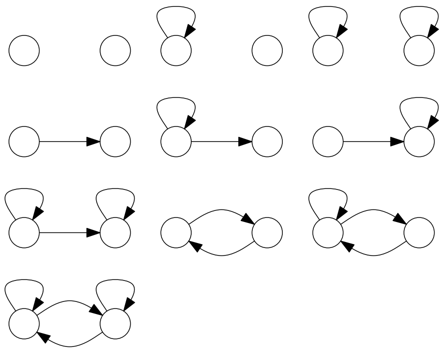
グラフの同型類の図示



頂点数 3 の無向グラフの同型類すべて

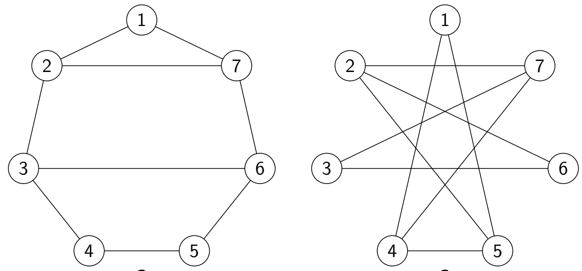


頂点数 2 の有向グラフの同型類すべて



例題：グラフの同型性 (1)

次の 2 つの無向グラフ G_1, G_2 に対して，
G_1 から G_2 への同型写像を 1 つ見つけよ



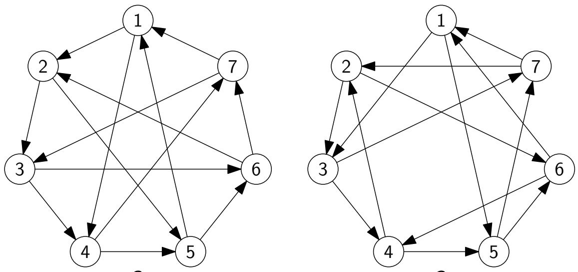
G_1 G_2

同型写像を φ とすると

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 4, \varphi(3) = 7, \varphi(4) = 3, \varphi(5) = 6, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 5$$

例題：グラフの同型性 (2)

次の 2 つの有向グラフ G_1, G_2 に対して，
G_1 から G_2 への同型写像を 1 つ見つけよ



G_1 G_2

同型写像を φ とすると

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 4, \varphi(4) = 5, \varphi(5) = 7, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 6$$

目次

今日のまとめ

今日の目標

- グラフの定義を理解する
- グラフの同型性を理解し，同型であるか判定できるようになる