

目次

- 1 数学的帰納法
- 2 再帰的定義
- 3 関数の冪乗
- 4 今日のまとめ

例題 1 : 数学的帰納法による証明

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して、

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ。

数学的帰納法による証明 : 方針

- 1 $n = 1$ のときに正しいことを証明する
- 2 任意の正の整数 $k \geq 1$ に対して、
 $n = k$ のときに正しいならば、 $n = k + 1$ のときに正しいことを証明する

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して、

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ。

証明 (続) : 次に、任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える。

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する。
- ▶ すなわち、ある正の整数 m が存在して、 $8^k - 3^k = 5m$ となる。
- ▶ $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$
- ▶ したがって、 $8^{k+1} - 3^{k+1} = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m = 5 \cdot (8^k + 3m)$ 。
- ▶ $8^k + 3m$ は正の整数なので、 $8^{k+1} - 3^{k+1}$ は 5 で割り切れる \square

今日の目標

- ▶ 数学的帰納法で証明ができるようになる
- ▶ 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

例題 1

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して、

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ。

確認

- ▶ $n = 1$ のとき : $8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$
- ▶ $n = 2$ のとき : $8^n - 3^n = 64 - 9 = 55 = 5 \times 11$
- ▶ $n = 3$ のとき : $8^n - 3^n = 512 - 27 = 485 = 5 \times 97$
- ▶ ...

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (1)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して、

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ。

証明 : まず $n = 1$ のときに正しいことを証明する。

- ▶ $n = 1$ のとき、 $8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$ 。
- ▶ 5 は 5 で割り切れるので、このとき正しい。

数学的帰納法とは ?

数学的帰納法とは ? (常識に基づく定義)

「任意の正の整数 n に対して、 $P(n)$ 」という形の命題の証明

- 1 $P(1)$ を証明 (基底段階)
- 2 「任意の正の整数 k に対して『 $P(k)$ ならば $P(k + 1)$ 』」を証明 (帰納段階)

例題 1 では、

$$P(n) = 8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$



<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dominoeffect.png>

テンプレート：数学的帰納法 (証明の雛形)

[基底段階] まず, $P(1)$ を証明する .

ここで $P(1)$ を結論として導く .

したがって, $P(1)$ が成立する .

[帰納段階] 次に, k を任意の正の整数とする .

$P(k)$ が成立すると仮定する .

ここで $P(k+1)$ を結論として導く .

したがって, $P(k)$ ならば $P(k+1)$ が成立する .

したがって, 任意の正の整数 n に対して $P(n)$ が成立する . \square

例題 2：数学的帰納法 (基底段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

証明 (基底段階)：まず, $n = 1$ のときに正しいことを証明する .

- ▶ 左辺 = $2n = 2$.
- ▶ 右辺 = $2^n = 2$.
- ▶ したがって, $2n \leq 2^n$ であり, 正しい .

例題 3：数学的帰納法の変種

例題 3：証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

確認

- ▶ $n = 3$ のとき : $6n = 18 < 27 = 3^n$
- ▶ $n = 4$ のとき : $6n = 24 < 81 = 3^n$
- ▶ $n = 5$ のとき : $6n = 30 < 243 = 3^n$
- ▶ ...

証明の方法

数学的帰納法を $n = 1$ から始めず, $n = 3$ から始める

基底段階

使える性質

導く性質

$$P(1)$$

帰納段階

任意の正の整数 k に対して

使える性質

導く性質

$$P(k)$$

$$P(k+1)$$

この「 $P(k)$ 」を帰納法の仮定と呼ぶ

例題 2

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

確認

- ▶ $n = 1$ のとき : $2n = 2 \leq 2 = 2^n$
- ▶ $n = 2$ のとき : $2n = 4 \leq 4 = 2^n$
- ▶ $n = 3$ のとき : $2n = 6 \leq 8 = 2^n$
- ▶ $n = 4$ のとき : $2n = 8 \leq 16 = 2^n$
- ▶ ...

例題 2：数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階)：次に, 任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える .

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する .
- ▶ $2(k+1) = 2k + 2$.
- ▶ 帰納法の仮定より, $2k + 2 \leq 2^k + 2$.
- ▶ したがって, $2(k+1) \leq 2^k + 2 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$.
- ▶ したがって, $2(k+1) \leq 2^{k+1}$ であり, 正しい . \square

例題 3：数学的帰納法の変種 (基底段階)

例題 3：証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (基底段階)：まず, $n = 3$ のときに正しいことを証明する .

- ▶ 左辺 = $6n = 18$.
- ▶ 右辺 = $3^n = 27$.
- ▶ したがって, $n = 3$ のとき $6n < 3^n$ となり, 正しい .

例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ .

証明 (帰納段階) : 次に , 3 以上の任意の正整数 k を考える .

- ▶ $6k < 3^k$ であると仮定する .
- ▶ $6(k+1) = 6k + 6 < 3^k + 6 < 3^k + 2 \cdot 3^k = 3^{k+1}$.
- ▶ したがって , $6(k+1) < 3^{k+1}$ となり , 正しい . □

クイズ

次に来るのは何 ?

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ 「...」はあいまい

格言

情報科学の本質の 1 つは「『無意識』を意識すること」

階乗 : 再帰的定義

階乗とは ? (再帰的定義)

正の整数 n に対して , n の階乗とは

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n-1)! & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

のこと

実際の計算

- ▶ $n = 1$ のとき : $1! = 1$
- ▶ $n = 2$ のとき : $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- ▶ $n = 3$ のとき : $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- ▶ $n = 4$ のとき : $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- ▶ ...

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (基底段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して , a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき ,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (基底段階) : まず , $n = 1$ のときを証明する .

- ▶ 左辺 = $a_1 = 1$.
- ▶ 右辺 = $2 \cdot 1 - 1 = 1$.
- ▶ したがって , $n = 1$ のとき $a_n = 2n - 1$ となる .

目次

- ① 数学的帰納法
- ② 再帰的定義
- ③ 関数の冪乗
- ④ 今日のまとめ

階乗

階乗とは ? (常識に基づく定義)

正の整数 n に対して , n の階乗とは

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

のこと

この定義の問題点

- ▶ 「...」はあいまい

あいまいさのないように定義するには ?

例題 4 : 再帰的定義

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して , a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき ,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

確認

- ▶ $n = 1$ のとき : $a_1 = 1$
- ▶ $n = 2$ のとき : $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 = 2 \cdot 2 - 1$
- ▶ $n = 3$ のとき : $a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$
- ▶ $n = 4$ のとき : $a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7 = 2 \cdot 4 - 1$
- ▶ ...

例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して , a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき ,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数 k を考える .

- ▶ $a_k = 2k - 1$ であると仮定する .
- ▶ $a_{k+1} = a_k + 2 = (2k - 1) + 2 = 2(k + 1) - 1$.
- ▶ したがって , $a_{k+1} = 2(k + 1) - 1$ となり , 正しい . □

フィボナッチ数とは？

任意の正の整数 n に対して、第 n 番フィボナッチ数 F_n を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n=2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する

確認

- ▶ $n=1$ のとき： $F_1=1$
- ▶ $n=2$ のとき： $F_2=1$
- ▶ $n=3$ のとき： $F_3=F_2+F_1=1+1=2$
- ▶ $n=4$ のとき： $F_4=F_3+F_2=2+1=3$
- ▶ $n=5$ のとき： $F_5=F_4+F_3=3+2=5$
- ▶ ...

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (基底段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき、任意の正整数 n に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(基底段階) $n=1$ の場合を証明する。

- ▶ 左辺 $= F_2^2 - F_3F_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$.
- ▶ 右辺 $= (-1)^1 = -1$.
- ▶ したがって、 $n=1$ のとき $F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$ は成り立つ

フィボナッチ数の公式

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明の注意点

- ▶ F_n は F_{n-1}, F_{n-2} を使って定義される
- ▶ よって、(1つ前だけ仮定する) 普通の帰納法では証明できない
- ▶ よって、もっと強い証明の仕方が必要となる
- ▶ 基底段階も $n=1$ のときと $n=2$ のときの2つが必要となる

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (基底段階 1)

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：まず、 $n=1$ のときを証明する。

- ▶ 左辺 $= F_1 = 1$.
- ▶ 右辺 $= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- ▶ したがって、 $n=1$ のときは正しい。

フィボナッチ数の性質

例題 5 (カッシーニの恒等式)

第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき、任意の正整数 n に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に、1以上の任意の正の整数 k を考える。

- ▶ $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する。
- ▶ $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
 - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ (フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から)
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ (展開して整理)
 - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$ (帰納法の仮定から)
 - $= F_{k+2}(F_{k+2} - F_{k+1} - F_k) + (-1)^{k+1}$ (因数分解して整理)
 - $= (-1)^{k+1}$. (フィボナッチ数の定義と $k+2 > 2$ から)
- ▶ したがって、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ となり、正しい。 □

数学的帰納法の強いバージョン

数学的帰納法の強いバージョン

[基底段階]

- ▶ $P(1)$ を証明する

[帰納段階] 任意の正の整数 k を考える

- ▶ 1以上 k 以下の任意の正の整数 k' に対して $P(k')$ を仮定する
- ▶ $P(k+1)$ を証明する

- ▶ 前のバージョンでは帰納段階で「 $P(k)$ 」のみを仮定した
- ▶ フィボナッチ数に関する証明では基底段階が $P(1)$ と $P(2)$ になる

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (基底段階 2)

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：次に、 $n=2$ のときを証明する。

- ▶ 左辺 $= F_2 = 1$.
- ▶ 右辺 $= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right)$
 - $= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- ▶ したがって、 $n=2$ のときは正しい。

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明： k を 2 以上の任意の整数とする。

▶ 1 以上 k 以下の任意の整数に対して、

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) \text{ と仮定する。}$$

▶ ...

目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 関数の冪乗

④ 今日のまとめ

関数の冪乗：例題

例題 7

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する。このとき、任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1} x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ

確認

- ▶ $n = 2$ のとき： $f^2(x) = f(2x^2) = 2(2x^2)^2 = 2^3 x^4$
- ▶ $n = 3$ のとき： $f^3(x) = f(2^3 x^4) = 2(2^3 x^4)^2 = 2^7 x^8$
- ▶ $n = 4$ のとき： $f^4(x) = f(2^7 x^8) = 2(2^7 x^8)^2 = 2^{15} x^{16}$
- ▶ ...

関数の冪乗：例題 — 証明 (2)

例題 7

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する。このとき、任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1} x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ

証明（帰納段階）：次に、任意の正の整数 k を考える。

- ▶ $f^k(x) = 2^{2^k-1} x^{2^k}$ が正しいと仮定する。

F_{k+1}

$$= F_k + F_{k-1} \quad (\text{フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right)$$

(帰納法の仮定)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right)$$

(式の整理)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right)$$

(式の整理)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$$

(式の整理)

したがって、 $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$ となり正しい。□

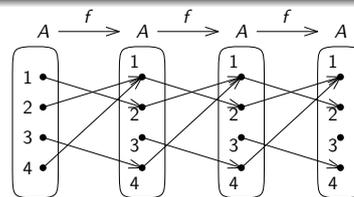
関数の冪乗

集合 A と関数 $f: A \rightarrow A$

関数の冪乗とは？

0 以上の整数 n に対して f の冪乗 $f^n: A \rightarrow A$ を次で定義する

$$f^n = \begin{cases} \text{id}_A & (n = 0 \text{ のとき}) \\ f \circ f^{n-1} & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



- ▶ $f(1) = 2, f(2) = 1,$
 $f(3) = 4, f(4) = 1$
- ▶ $f^2(1) = 1, f^2(2) = 2,$
 $f^2(3) = 1, f^2(4) = 2$
- ▶ $f^3(1) = 2, f^3(2) = 1,$
 $f^3(3) = 2, f^3(4) = 1$

関数の冪乗：例題 — 証明 (1)

例題 7

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する。このとき、任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1} x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ

証明（基底段階）：まず、 $n = 1$ のときに正しいことを証明する。

- ▶ 左辺 = $f^1(x) = f(x) = 2x^2$
- ▶ 右辺 = $2^{2^1-1} x^{2^1} = 2x^2$
- ▶ したがって、 $n = 1$ のとき、 $f^n(x) = 2^{2^n-1} x^{2^n}$ は正しい。

関数の冪乗：例題 — 証明 (3)

$f^{k+1}(x)$

$$= (f \circ f^k)(x) \quad (\text{関数の冪乗の定義})$$

$$= f(f^k(x)) \quad (\text{関数の合成の定義})$$

$$= f(2^{2^k-1} x^{2^k}) \quad (\text{帰納法の仮定})$$

$$= 2(2^{2^k-1} x^{2^k})^2 \quad (f \text{ の定義})$$

$$= 2^{1+2(2^k-1)} x^{2 \cdot 2^k} \quad (\text{計算して整理})$$

$$= 2^{2^{k+1}-1} x^{2^{k+1}} \quad (\text{更に整理})$$

したがって、 $f^{k+1}(x) = 2^{2^{k+1}-1} x^{2^{k+1}}$ は正しい。□

- ① 数学的帰納法
- ② 再帰的定義
- ③ 関数の冪乗
- ④ 今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 数学的帰納法で証明ができるようになる
- ▶ 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する