離散数学 第 10 回
順序と同値関係 (2)：同値関係

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 7 月 10 日

最終更新：2012 年 7 月 9 日　09:53

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (6 月 5 日)
- 8 関数 (2) 全射と単射 (6 月 12 日)
- ⋆ 台風による休講 (6 月 19 日)
- ⋆ 休講 (6 月 26 日)
- 9 順序と同値関係 (1) 関係 (7 月 3 日)
- 10 順序と同値関係 (2) 同値関係 (7 月 10 日)
- 11 順序と同値関係 (3) 順序関係 (7 月 17 日)
- 12 数学的帰納法 (7 月 24 日)
- 13 グラフと木 (7 月 31 日？)

注意：予定の変更もありうる

概要

今日の目標

- 同値関係と分割の関係を理解する
  - 分割とは？
  - 分割から同値関係へ
  - 同値関係から分割へ
    - 同値分割と商集合

同値関係

集合 A と A 上の関係 R

同値関係とは？

R が**同値関係**であるとは，次を満たすこと
- R は反射性を持つ
- R は対称性を持つ
- R は推移性を持つ

- 反射性：任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{R} x$
- 対称性：任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{R} y$ ならば $y \mathrel{R} x$
- 推移性：任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ ならば $x \mathrel{R} z$

同値関係を表す記号

同値関係を表すために，R ではなくて，特別な記号を使うことが多い

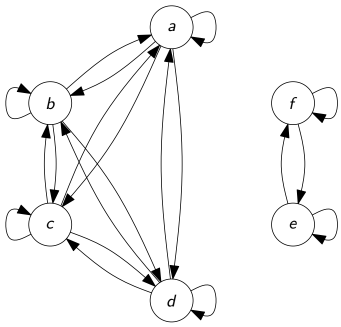
同値関係を表す記号の例
- $=$
- $\equiv$
- $\sim$
- $\simeq$
- $\approx$
- …

その否定を表す記号の例
- $\neq$
- $\not\equiv$
- $\not\sim$
- $\not\simeq$
- $\not\approx$
- …

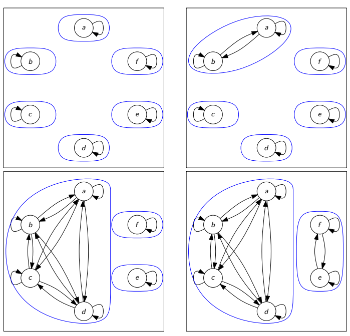
状況に応じて，使い分けられたりする

同値関係をグラフで描くとき…

これが同値関係を表すグラフだとすると？



同値関係が与える「かたまり」への分割

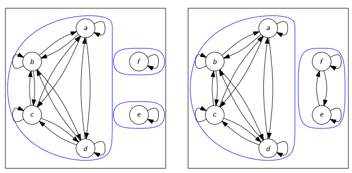


今日の目標

今から行うこと

次を証明する
- 「同値関係」から「『かたまり』への分割」が得られること
- 「『かたまり』への分割」から「同値関係」が得られること

つまり,「同値関係」と「分割」は同じものを別の方法で表現している



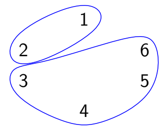
目次

集合の分割

分割とは？

集合 A の**分割**とは次を満たすような集合 P のこと
- 任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$ (非空性)
- 任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$ (素性)
- 任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ (被覆性)

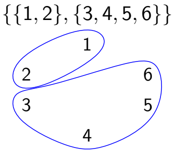
例：$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ のとき，$\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\}$ は A の分割



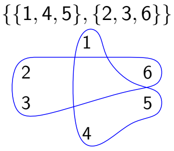
分割とは ?: 例 (続き)

次の 4 つはどれも $\{1,2,3,4,5,6\}$ の分割

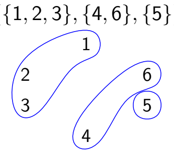
$\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\}$



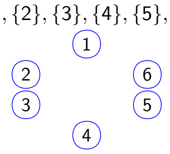
$\{\{1,4,5\},\{2,3,6\}\}$



$\{\{1,2,3\},\{4,6\},\{5\}\}$



$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$



分割の例：カレンダー

1ヵ月の 31 日をいろいろな方法で分割している

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

- 1 日 1 日で分割 (31 個の集合へ分割)
- 週ごとに分割 (5 個の集合へ分割)
- 曜日ことに分割 (7 個の集合へ分割)
- ...

目次

分割から同値関係へ

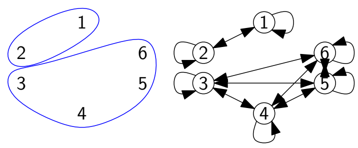
集合 A の分割 P を考える

分割から同値関係へ

- A 上の関係 R を，任意の $x, y \in A$ に対して

  $x\,R\,y$ であることは $\exists X \in P\ (x \in X \wedge y \in X)$

  として定義する
- このとき，R は A 上の同値関係である



分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x\,R\,x$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．
- P は A の分割なので，分割の被覆性から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$．
- したがって，ある $X \in P$ が存在して $x \in X$ かつ $x \in X$．
- したがって，$x\,R\,x$． $\square$

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x\,R\,y$ ならば $y\,R\,x$

証明：任意に $x, y \in A$ を選び，$x\,R\,y$ と仮定する．
- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- すなわち，ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$．
- したがって，$y\,R\,x$． $\square$

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x\,R\,y$ かつ $y\,R\,z$ ならば $x\,R\,z$

証明：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x\,R\,y$ かつ $y\,R\,z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$．
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$．
- 特に，$X \cap X' \neq \emptyset$．
- 分割の素性から，$X = X'$．
- したがって，$x \in X$ かつ $z \in X$．
- したがって，$x\,R\,z$． □

目次

同値類

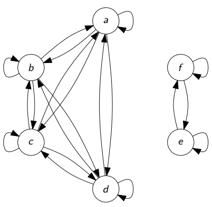
集合 A 上の同値関係 R を考える

同値類とは？

同値関係 R における要素 $a \in A$ の**同値類**とは

$$\{x \mid x \in A \text{ かつ } x\,R\,a\}$$

という集合のことであり，これを $[a]_R$ とも書く



- $[a]_R = \{a, b, c, d\}$
- $[b]_R = \{a, b, c, d\}$
- $[c]_R = \{a, b, c, d\}$
- $[d]_R = \{a, b, c, d\}$
- $[e]_R = \{e, f\}$
- $[f]_R = \{e, f\}$

同値関係から分割へ

集合 A 上の同値関係 R を考える

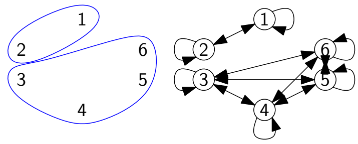
同値関係から分割へ

- A の部分集合の集合 P を次のように定義する

$$P = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

- このとき，P は A の分割になる

このような A の分割を，R に関する A の**同値分割**と呼ぶ



商集合

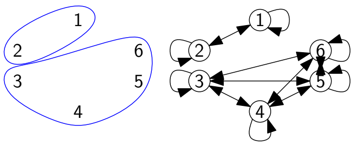
同値分割のことを商集合とも呼ぶ

商集合とは？

集合 A 上の同値関係 R に対して，R による A の同値分割を

$$A\,/\,R$$

と書き，これを R に関する A の**商集合**と呼ぶ．



$A\,/\,R = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in P$ を選ぶ．

- P の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同値類の定義から，$[a]_R \subseteq A$．
- したがって，$X \subseteq A$．

- 同値関係の反射性から，$a\,R\,a$．
- 同値類の定義から，$a \in [a]_R$．
- したがって，$[a]_R \neq \emptyset$．
- したがって，$X \neq \emptyset$． □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$．

証明：任意に $X, Y \in P$ を選ぶ．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する．
- P の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_R$．
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_R$．
- $X \cap Y \neq \emptyset$ から，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$．
- すなわち，$a'' \in [a]_R$ かつ $a'' \in [a']_R$．
- 同値類の定義から，$a''\,R\,a$ かつ $a''\,R\,a'$．
- $a''\,R\,a$ と同値関係の対称性から，$a\,R\,a''$．
- $a\,R\,a''$，$a''\,R\,a'$ と同値関係の推移性から，$a\,R\,a'$．
- $a\,R\,a'$ から，$[a]_R = [a']_R$． (演習問題)
- したがって，$X = Y$．
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$． □

同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

証明すべきこと (3)：被覆性

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- $X = [x]_R$ とする．
- 反射性から，$x\,R\,x$．
- 同値類の定義から，$x \in [x]_R$．
- したがって，$x \in X$． □

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 同値関係と分割の関係を理解する
  - 分割とは？
  - 分割から同値関係へ
  - 同値関係から分割へ
    - 同値分割と商集合

格言

本質的に同一であるものが，異なる表現を持つことはよくある