離散数学 第 5 回
集合 (3)：集合演算など

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 5 月 15 日

最終更新：2012 年 5 月 29 日　23:51

概要

今日の目標

- 「論理を用いた証明」がさらに使えるようになる
  - 新しいテンプレートが使えるようになる
- 集合の直積と冪集合 (べき集合) を理解する

目次

表と証明の雛形の変更：テンプレート

ここまでに登場したテンプレート

	$\wedge$	$\rightarrow$	$\vee$	$\neg$	$\forall$	$\exists$
使える性質	済		済			
導く性質	済	済	済			

他の場合のテンプレートははじめて使うときに紹介する

例題 1

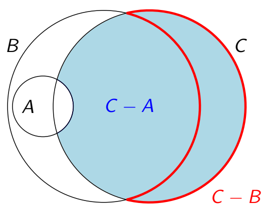
例題 1：次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

が成立する．

オイラー図による直観



例題 1：定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

部分集合の定義に基づいて書き直す (これは間違い !!)

$$(x \in A \rightarrow x \in B) \rightarrow (x \in C - B \rightarrow x \in C - A)$$

部分集合の定義に基づいて書き直す (こちらは正しい)

$$\forall\, x\ (x \in A \rightarrow x \in B) \rightarrow \forall\, x\ (x \in C - B \rightarrow x \in C - A)$$

分かりにくいので違う変数記号を使って書き直す

$$\forall\, x\ (x \in A \rightarrow x \in B) \rightarrow \forall\, y\ (y \in C - B \rightarrow y \in C - A)$$

例題 1：表

使える性質	導く性質
$\forall\, x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$	$\forall\, y\ (y \in C - B \rightarrow y \in C - A)$

テンプレート：導く性質に ∀ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
○○○	$\forall\, x \in D\ (P(x))$

変更後

任意の $x \in D$ に対して

使える性質	導く性質
○○○	$\cancel{\forall\, x \in D\ (P(x))}$
$x \in D$	$P(x)$

テンプレート：導く性質に ∀ があるとき (証明の雛形)

任意の要素 $x \in D$ を選ぶ．

ここで「$P(x)$」を結論として導く．

したがって，$\forall x \in D\ (P(x))$ が成立する．

例題 1：表の変更

導く性質に ∀ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall x\ (x \in A \to x \in B)$	$\cancel{\forall y\ (y \in C - B \to y \in C - A)}$
	$y \in C - B \to y \in C - A$

例題 1：証明の雛形

部分集合の定義から,「任意の x に対して『$x \in A$ ならば $x \in B$』であるとき，任意の y に対して『$y \in C - B$ ならば $y \in C - A$』である」ことを証明すればよい．

任意の要素 y を選ぶ．

ここで「$y \in C - B \to y \in C - A$」を結論として導く．

したがって，任意の y に対して $y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．

したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

例題 1：表の変更

任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall x\ (x \in A \to x \in B)$	$\cancel{\forall y\ (y \in C - B \to y \in C - A)}$
	$y \in C - B \to y \in C - A$

テンプレート：使える性質に ∀ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$\forall x \in D\ (P(x))$	○○○

変更後

自分で作った $x_0 \in D$ に対して (x_0 は D の要素である限り何でもよい)

使える性質	導く性質
$\forall x \in D\ (P(x))$	○○○
$P(x_0)$	

この変更を全称例化と呼ぶこともある

テンプレート：使える性質に ∀ があるとき (証明の雛形)

$x_0 \in D$ なので $P(x_0)$ が成り立つ．
ここで「○○○」を結論として導く．

例題 1：表の変更

使える性質に ∀ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall x\ (x \in A \to x \in B)$	$\cancel{\forall y\ (y \in C - B \to y \in C - A)}$
$y \in A \to y \in B$	$y \in C - B \to y \in C - A$

例題 1：証明の雛形の変更

部分集合の定義から,「任意の x に対して『$x \in A$ ならば $x \in B$』であるとき，任意の y に対して『$y \in C - B$ ならば $y \in C - A$』である」ことを証明すればよい．

任意の要素 y を選ぶ．

前提から,「$y \in A$ ならば $y \in B$」が成立する．
ここで「$y \in C - B$ ならば $y \in C - A$」を結論として導く．

したがって，任意の y に対して $y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．

したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

例題 1：表の変更

導く性質に $\rightarrow$ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall\, x\, (x \in A \rightarrow x \in B)$	$\cancel{\forall\, y\, (y \in C - B \rightarrow y \in C - A)}$
$y \in A \rightarrow y \in B$	$\cancel{y \in C - B \rightarrow y \in C - A}$
$y \in C - B$	$y \in C - A$

例題 1：証明の雛形の変更

部分集合の定義から，「任意の x に対して『$x \in A$ ならば $x \in B$』であるとき，任意の y に対して『$y \in C - B$ ならば $y \in C - A$』である」ことを証明すればよい．

任意の要素 y を選ぶ．

前提から，「$y \in A$ ならば $y \in B$」が成立する．
$y \in C - B$ であると仮定する．

ここで「$y \in C - A$」を結論として導く．

したがって，$y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．

したがって，任意の y に対して $y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．

したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

例題 1：表の変更

差集合の定義から
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall\, x\, (x \in A \rightarrow x \in B)$	$\cancel{\forall\, y\, (y \in C - B \rightarrow y \in C - A)}$
$y \in A \rightarrow y \in B$	$\cancel{y \in C - B \rightarrow y \in C - A}$
$y \in C - B$	$y \in C - A$
$y \in C \wedge y \notin B$	

例題 1：表の変更

使える性質に $\wedge$ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall\, x\, (x \in A \rightarrow x \in B)$	$\cancel{\forall\, y\, (y \in C - B \rightarrow y \in C - A)}$
$y \in A \rightarrow y \in B$	$\cancel{y \in C - B \rightarrow y \in C - A}$
$y \in C - B$	$y \in C - A$
$y \in C \wedge y \notin B$	
$y \in C$	
$y \notin B$	

例題 1：証明の雛形の変更

…

任意の要素 y を選ぶ．

前提から，「$y \in A$ ならば $y \in B$」が成立する．
$y \in C - B$ であると仮定する．

差集合の定義から，$y \in C$ かつ $y \notin B$．
ここで「$y \in C - A$」を結論として導く．

したがって，$y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．

したがって，任意の y に対して $y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．

したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

例題 1：表の変更

含意の除去 (同値変形) から
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall\, x\, (x \in A \rightarrow x \in B)$	$\cancel{\forall\, y\, (y \in C - B \rightarrow y \in C - A)}$
$y \in A \rightarrow y \in B$	$\cancel{y \in C - B \rightarrow y \in C - A}$
$y \in C - B$	$y \in C - A$
$y \in C \wedge y \notin B$	
$y \in C$	
$y \notin B$	
$y \notin A \vee y \in B$	

例題 1：表の変更

使える性質に $\vee$ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall\, x\, (x \in A \rightarrow x \in B)$	$\cancel{\forall\, y\, (y \in C - B \rightarrow y \in C - A)}$
$y \in A \rightarrow y \in B$	$\cancel{y \in C - B \rightarrow y \in C - A}$
$y \in C - B$	$y \in C - A$
$y \in C \wedge y \notin B$	
$y \in C$	
$y \notin B$	
$y \notin A \vee y \in B$	
$y \notin A$	

例題 1：証明の雛形の変更

…

任意の要素 y を選ぶ．

前提から，「$y \in A$ ならば $y \in B$」が成立する．
$y \in C - B$ であると仮定する．

差集合の定義から，$y \in C$ かつ $y \notin B$．
「$y \in A$ ならば $y \in B$」と $y \notin B$ から，$y \notin A$ となる．
ここで「$y \in C - A$」を結論として導く．

したがって，$y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．

したがって，任意の y に対して $y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．

したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

例題 1：表の変更

差集合の定義から
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$\forall x\ (x \in A \to x \in B)$	$\cancel{\forall y\ (y \in C - B \to y \in C - A)}$
$y \in A \to y \in B$	$\cancel{y \in C - B \to y \in C - A}$
$y \in C - B$	$y \in C - A$
$y \in C \land y \notin B$	
$y \in C$	
$y \notin B$	
$y \notin A \lor y \in B$	
$y \notin A$	
$y \in C - A$	

例題 1：証明の雛形の変更

…

任意の要素 y を選ぶ．

前提から，「$y \in A$ ならば $y \in B$」が成立する．
$y \in C - B$ であると仮定する．

差集合の定義から，$y \in C$ かつ $y \notin B$．
「$y \in A$ ならば $y \in B$」と $y \notin B$ から，$y \notin A$ となる．
$y \in C$ と $y \notin A$ から，$y \in C - A$ となる．

したがって，$y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．

したがって，任意の y に対して $y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．

したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

例題 1：証明の清書

- 部分集合の定義から，「任意の x に対して『$x \in A$ ならば $x \in B$』であるとき，任意の y に対して『$y \in C - B$ ならば $y \in C - A$』である」ことを証明すればよい．
- 任意の要素 y を選ぶ．
- 前提から，「$y \in A$ ならば $y \in B$」が成立する．
- $y \in C - B$ であると仮定する．
- 差集合の定義から，$y \in C$ かつ $y \notin B$．
- 「$y \in A$ ならば $y \in B$」と $y \notin B$ から，$y \notin A$ となる．
- $y \in C$ と $y \notin A$ から，$y \in C - A$ となる．
- したがって，$y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．
- したがって，任意の y に対して $y \in C - B$ ならば $y \in C - A$ となる．
- したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

表と証明の雛形の変更：テンプレート

ここまでに登場したテンプレート

	$\land$	$\to$	$\lor$	$\neg$	$\forall$	$\exists$
使える性質	済		済		済	
導く性質	済	済	済		済	

他の場合のテンプレートははじめて使うときに紹介する

例題 2

例題 2：次を証明せよ

任意の集合 A に対して
$$\emptyset \subseteq A$$
が成立する．

定義に基づいて書き直す

$$x \in \emptyset \to x \in A$$

例題 2：表

使える性質	導く性質
$x \in \emptyset$	$x \in A$

例題 2：表

対偶による証明を行う

使える性質	導く性質
$\cancel{x \in \emptyset}$	$\cancel{x \in A}$
$x \notin A$	$x \notin \emptyset$

例題 2：表

空集合の定義から

使える性質	導く性質
$\cancel{x \in \emptyset}$	$\cancel{x \in A}$
$x \notin A$	$x \notin \emptyset$
$\forall y\ (y \notin \emptyset)$	

例題 2：表

使える性質に ∀ があるときのテンプレートより

使える性質	導く性質
~~$x \in \emptyset$~~	~~$x \in A$~~
$x \notin A$	$x \notin \emptyset$
$\forall\, y\ (y \notin \emptyset)$	
$x \notin \emptyset$	

例題 2：証明の雛形

部分集合の定義から，「$x \in \emptyset$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．

> 対偶による証明を行うために，$x \notin A$ であると仮定する．
>
> > 空集合の定義より，$x \notin \emptyset$ となる．
>
> したがって，$x \in \emptyset$ ならば $x \in A$ となる．

したがって，$\emptyset \subseteq A$ となる． □

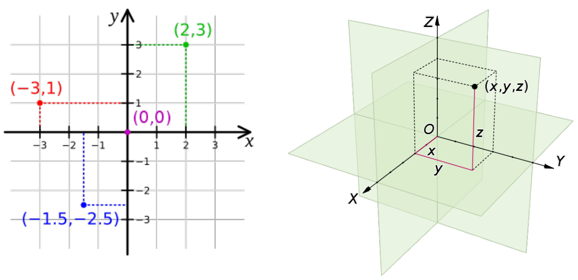
例題 2：証明の清書

- 部分集合の定義から，「$x \in \emptyset$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．
- 対偶による証明を行うために，$x \notin A$ であると仮定する．
- 空集合の定義より，$x \notin \emptyset$ となる．
- したがって，$x \in \emptyset$ ならば $x \in A$ となる．
- したがって，$\emptyset \subseteq A$ となる． □

目次

座標

- 2 次元平面の点の座標は 2 つの実数を「対」にして表現する
- このように，集合の要素を「対」にすることは有用



http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

順序対 (2 個組)

順序対とは？ (常識に基づく定義)

順序対とは，ものを 2 つ並べたもののことである．

- a と a' をこの順で並べたものは「(a, a')」と表記する

「順序対」は単に「対」や「組」と呼ばれることもある

同じ順序対 (常識に基づく定義)

2 つの順序対 (a, a') と (b, b') が**等しい**ことを $(a, a') = (b, b')$ と表記し，

$$a = b \text{ かつ } a' = b'$$

であることと定義する

注意：(a, a') と (a', a) は $a \neq a'$ ならば異なる

集合の直積 (1)

集合の直積

集合 A と集合 B の**直積**を $A \times B$ と表記して，

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

「直積」は「デカルト積」とも呼ぶ

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

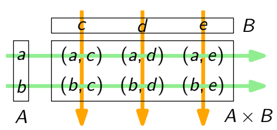
簡単な確認：$A \times B$ の要素数 $=$ (A の要素数) $\times$ (B の要素数)

集合の直積：図示

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$



例 続き

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$B \times A = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b), (e, a), (e, b)\}$$

n 個組

n は自然数

n 個組とは？（常識に基づく定義）

n 個組とは，ものを n 個並べたもののことである．

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ をこの順で並べたものは「$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$」と表記する

同じ n 個組（常識に基づく定義）

2 つの n 個組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が等しいことを $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ と表記し，

$$\text{すべての } i \text{ に対して } a_i = b_i$$

であることと定義する

集合の直積 (2)

集合の直積

集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の直積を $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ と表記して，

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ (x_i \in A_i)\}$$

と定義する

「$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$」を「$\prod_{i=1}^{n} A_i$」と書くこともある

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{f, g\}$ のとき，

$$\begin{aligned} A \times B \times C &= \{(a,c,f),(a,c,g),(a,d,f),(a,d,g),(a,e,f),(a,e,g),\\ &\quad (b,c,f),(b,c,g),(b,d,f),(b,d,g),(b,e,f),(b,e,g)\} \end{aligned}$$

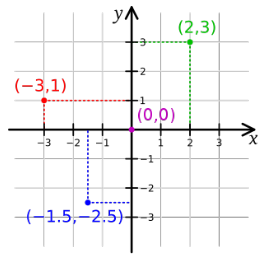
簡単な確認：$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ の要素数 $=$ (A_1 の要素数) $\times$ (A_2 の要素数) $\times \cdots \times$ (A_n の要素数)

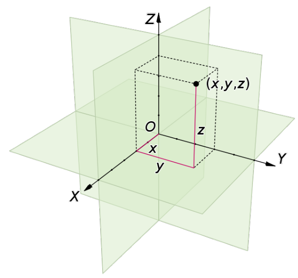
集合の直積 (関係する記法)

- $A \times A$ を A^2 と書く
- $A \times A \times A$ を A^3 と書く
- $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{ 個}}$ を A^n と書く

集合の直積：例 1 (デカルト座標系)

- $\mathbb{R}^2 = 2$ 次元平面
- $\mathbb{R}^3 = 3$ 次元空間
- $\ldots$





http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

集合の直積：例 2 (IP アドレス)

(IPv4 における) IP アドレスは 1 バイトの数 4 つで表現される

- www.uec.ac.jp: 130.153.9.10
- www.wikipedia.com: 208.80.154.225

つまり，

$$\text{可能な IP アドレス全体の集合} = \{0, \ldots, 255\}^4$$

集合の直積：例 3 (DNA (デオキシリボ核酸))

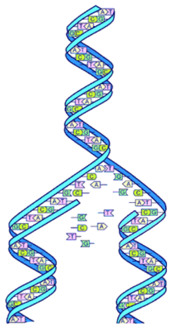
DNA は生物の遺伝情報を担う物質

- アデニン (A)，チミン (T)，シトシン (C)，グアニン (G) という塩基の並び方で遺伝情報はだいたい決められている

つまり，

- DNA が持つ遺伝情報全体の集合 $= \{\mathrm{A}, \mathrm{T}, \mathrm{C}, \mathrm{G}\}^n$

n は生物種によって異なる自然数



http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_replication

集合の直積：補足

集合の直積 (再掲)

集合 A と集合 B の直積を $A \times B$ と表記して，

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

定義から，次が分かる

- $A \times \emptyset = \emptyset$
- $\emptyset \times B = \emptyset$

目次

冪集合

冪集合

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり，2^A と表記する．

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- 「冪集合」の他に「巾集合」,「べき集合」,「ベキ集合」とも書く
- 「2^A」の他に「$\mathcal{P}(A)$」,「$\mathscr{P}(A)$」とも書く

例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

簡単な確認：2^A の要素数 $= 2^{A \text{ の要素数}}$

冪集合：他の例

冪集合 (再掲)

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり，2^A と表記する．

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- $2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

目次

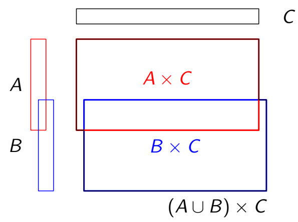
証明の例題 3

例題 3

任意の集合 A, B, C に対して，次が成り立つことを証明せよ．

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

図の直観



例題 3：表

使える性質	導く性質
	$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

例題 3：表の変更

「$=$」の定義から

使える性質	導く性質
	$\cancel{(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)}$
	$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$ かつ
	$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$

例題 3：表の変更

導く性質に $\wedge$ があるときのテンプレートから

使える性質	導く性質
	$\cancel{(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)}$
	~~$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$ かつ~~
	$\cancel{(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C}$
	$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$

と

使える性質	導く性質
	$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$

例題 3：証明の雛形

はじめに，$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$ を証明する．

ここで，$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$ を結論として導く．

次に，$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$ を証明する．

ここで，$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$ を結論として導く．

したがって，$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ となる．□

前半の証明は演習問題 (以下，後半だけ証明する)

例題 3 の後半：証明の雛形

次に，$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$ を証明する．

ここで，$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$ を結論として導く．

例題 3 の後半：表の変更

部分集合の定義から

使える性質	導く性質
	~~$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$~~
	$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$ ならば
	$(x, y) \in (A \cup B) \times C$

例題 3 の後半：表の変更

導く性質に → があるときのテンプレートから

使える性質	導く性質
$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$	~~$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$~~
	~~$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$ ならば~~
	~~$(x, y) \in (A \cup B) \times C$~~
	$(x, y) \in (A \cup B) \times C$

例題 3 の後半：証明の雛形の変更

次に，$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$ を証明する．

$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$ であると仮定する．

ここで，$(x, y) \in (A \cup B) \times C$ を結論として導く．

したがって，$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$ となる．

例題 3 の後半：表の変更

合併の定義から

使える性質	導く性質
$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$	~~$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$~~
$(x, y) \in A \times C$ または	~~$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$ ならば~~
$(x, y) \in B \times C$	~~$(x, y) \in (A \cup B) \times C$~~
	$(x, y) \in (A \cup B) \times C$

テンプレート：使える性質に ∨ があるとき Part 2 (表)

変更前

使える性質	導く性質
$P \vee Q$	○○○

変更後

使える性質	導く性質
$P \vee Q$	○○○
P	

と

使える性質	導く性質
$P \vee Q$	○○○
Q	

これは場合分けによる証明と呼ばれる手法である

テンプレート：使える性質に ∨ があるとき Part 2 (証明の雛形)

第 1 の場合：P であると仮定する．

ここで「○○○」を結論として導く．

第 2 の場合：Q であると仮定する．

ここで「○○○」を結論として導く．

したがって,「$P \vee Q$ ならば○○○」となる．

例題 3 の後半：表の変更

使える性質に ∨ があるときのテンプレートより

使える性質	導く性質
$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$	~~$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$~~
$(x, y) \in A \times C$ または	~~$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$ ならば~~
$(x, y) \in B \times C$	~~$(x, y) \in (A \cup B) \times C$~~
$(x, y) \in A \times C$	$(x, y) \in (A \cup B) \times C$

と

使える性質	導く性質
$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$	~~$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$~~
$(x, y) \in A \times C$ または	~~$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$ ならば~~
$(x, y) \in B \times C$	~~$(x, y) \in (A \cup B) \times C$~~
$(x, y) \in B \times C$	$(x, y) \in (A \cup B) \times C$

例題 3 の後半：証明の雛形の変更

次に，$(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C$ を証明する．

$(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$ であると仮定する．
合併の定義より $(x,y)\in A\times C$ または $(x,y)\in B\times C$ となる．

第 1 の場合：$(x,y)\in A\times C$ であると仮定する．

ここで，$(x,y)\in(A\cup B)\times C$ を結論として導く．

第 2 の場合：$(x,y)\in B\times C$ であると仮定する．

ここで，$(x,y)\in(A\cup B)\times C$ を結論として導く．

したがって，$(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C$ となる．

例題 3 の後半 (第 1 の場合)：表の変更

直積の定義から

使える性質	導く性質
$(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$	$\cancel{(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C}$
$(x,y)\in A\times C$ または	$\cancel{(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)}$ ~~ならば~~
$(x,y)\in B\times C$	$\cancel{(x,y)\in(A\cup B)\times C}$
$(x,y)\in A\times C$	$(x,y)\in(A\cup B)\times C$
$x\in A$ かつ $y\in C$	

例題 3 の後半 (第 1 の場合)：表の変更

直積の定義から

使える性質	導く性質
$(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$	$\cancel{(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C}$
$(x,y)\in A\times C$ または	$\cancel{(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)}$ ~~ならば~~
$(x,y)\in B\times C$	$\cancel{(x,y)\in(A\cup B)\times C}$
$(x,y)\in A\times C$	$\cancel{(x,y)\in(A\cup B)\times C}$
$x\in A$ かつ $y\in C$	$x\in A\cup B$ かつ $y\in C$

例題 3 の後半 (第 1 の場合)：表の変更

使える性質に $\wedge$ があるときのテンプレートから

使える性質	導く性質
$(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$	$\cancel{(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C}$
$(x,y)\in A\times C$ または	$\cancel{(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)}$ ~~ならば~~
$(x,y)\in B\times C$	$\cancel{(x,y)\in(A\cup B)\times C}$
$(x,y)\in A\times C$	$\cancel{(x,y)\in(A\cup B)\times C}$
$x\in A$ かつ $y\in C$	$x\in A\cup B$ かつ $y\in C$
$x\in A$	
$y\in C$	

例題 3 の後半 (第 1 の場合)：表の変更

「$P\Rightarrow P\vee Q$」なので

使える性質	導く性質
$(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$	$\cancel{(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C}$
$(x,y)\in A\times C$ または	$\cancel{(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)}$ ~~ならば~~
$(x,y)\in B\times C$	$\cancel{(x,y)\in(A\cup B)\times C}$
$(x,y)\in A\times C$	$\cancel{(x,y)\in(A\cup B)\times C}$
$x\in A$ かつ $y\in C$	$x\in A\cup B$ かつ $y\in C$
$x\in A$	
$y\in C$	
$x\in A$ または $x\in B$	

例題 3 の後半 (第 1 の場合)：表の変更

「$P\Rightarrow P\vee Q$」なので

使える性質	導く性質
$(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$	$\cancel{(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C}$
$(x,y)\in A\times C$ または	$\cancel{(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)}$ ~~ならば~~
$(x,y)\in B\times C$	$\cancel{(x,y)\in(A\cup B)\times C}$
$(x,y)\in A\times C$	$\cancel{(x,y)\in(A\cup B)\times C}$
$x\in A$ かつ $y\in C$	$x\in A\cup B$ かつ $y\in C$
$x\in A$	
$y\in C$	
$x\in A$ または $x\in B$	
$x\in A\cup B$	

例題 3 の後半：証明の雛形の変更

…

…

第 1 の場合：$(x,y)\in A\times C$ であると仮定する．

直積の定義から，$x\in A$ かつ $y\in C$ となる．
$x\in A$ と合併の定義から，$x\in A\cup B$ となる．
したがって，$(x,y)\in(A\cup B)\times C$ となる．

第 2 の場合：$(x,y)\in B\times C$ であると仮定する．

ここで，$(x,y)\in(A\cup B)\times C$ を結論として導く．

したがって，$(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C$ となる．

例題 3 の後半：証明の雛形の変更

…

…

第 1 の場合：$(x,y)\in A\times C$ であると仮定する．

直積の定義から，$x\in A$ かつ $y\in C$ となる．
$x\in A$ と合併の定義から，$x\in A\cup B$ となる．
したがって，$(x,y)\in(A\cup B)\times C$ となる．

第 2 の場合：$(x,y)\in B\times C$ であると仮定する．

直積の定義から，$x\in B$ かつ $y\in C$ となる．
$x\in B$ と合併の定義から，$x\in A\cup B$ となる．
したがって，$(x,y)\in(A\cup B)\times C$ となる．

したがって，$(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C$ となる．

例題 3 の後半：証明の清書

- $(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$ を証明する．
- $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$ であると仮定する．
- 合併の定義より $(x, y) \in A \times C$ または $(x, y) \in B \times C$ となる．

- 第 1 の場合：$(x, y) \in A \times C$ であると仮定する．
- 直積の定義から，$x \in A$ かつ $y \in C$ となる
- $x \in A$ と合併の定義から，$x \in A \cup B$ となる．
- したがって，$(x, y) \in (A \cup B) \times C$ となる．

- 第 2 の場合：$(x, y) \in B \times C$ であると仮定する．
- 直積の定義から，$x \in B$ かつ $y \in C$ となる
- $x \in B$ と合併の定義から，$x \in A \cup B$ となる．
- したがって，$(x, y) \in (A \cup B) \times C$ となる．

- したがって，$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$ となる．

証明の例題 4

例題 4

集合 A, B に対して，次が成り立つことを証明せよ．

$$2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B.$$

- つまり，次の 2 つを別々に証明する
  - $2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$
  - $2^A \cap 2^B \subseteq 2^{A \cap B}$ (演習問題)

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明：表

部分集合の定義から

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A \cap B}$	$X \in 2^A \cap 2^B$

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明：表の変更

共通部分の定義から

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A \cap B}$	$\cancel{X \in 2^A \cap 2^B}$
	$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明：証明の雛形

部分集合の定義から「$X \in 2^{A \cap B}$ ならば $X \in 2^A \cap 2^B$」を証明すればよい．

$X \in 2^{A \cap B}$ と仮定する．

ここで，$X \in 2^A \cap 2^B$ を結論として導く．

したがって，$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$ となる．

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明：表の変更

導く性質に $\wedge$ があるときのテンプレートから

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A \cap B}$	$\cancel{X \in 2^A \cap 2^B}$
	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
	$X \in 2^A$

と

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A \cap B}$	$X \in 2^B$

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明：証明の雛形の変更

部分集合の定義から「$X \in 2^{A \cap B}$ ならば $X \in 2^A \cap 2^B$」を証明すればよい．

$X \in 2^{A \cap B}$ と仮定する．

まず，$X \in 2^A$ を証明する．

ここで，$X \in 2^A$ を結論として導く．

次に，$X \in 2^B$ を証明する．

ここで，$X \in 2^B$ を結論として導く．

したがって，$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$ となる．

共通部分の定義から，$X \in 2^A \cap 2^B$ となる．

したがって，$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$ となる．

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：表の変更

冪集合の定義から

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A \cap B}$	$\cancel{X \in 2^A \cap 2^B}$
$X \subseteq A \cap B$	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
	$X \in 2^A$

「$2^{A\cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：表の変更

冪集合の定義から

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A\cap B}$	~~$X \in 2^A \cap 2^B$~~
$X \subseteq A \cap B$	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
	~~$X \in 2^A$~~
	$X \subseteq A$

「$2^{A\cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：証明の雛形の変更

…

$X \in 2^{A\cap B}$ と仮定する．

まず，$X \in 2^A$ を証明する．

冪集合の定義から，$X \subseteq A \cap B$ となる．

ここで，$X \subseteq A$ を結論として導く．

冪集合の定義から，$X \in 2^A$ となる．

…

…

…

「$2^{A\cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：表の変更

部分集合の定義から

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A\cap B}$	~~$X \in 2^A \cap 2^B$~~
$X \subseteq A \cap B$	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in A \cap B)$	~~$X \in 2^A$~~
	$X \subseteq A$

「$2^{A\cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：表の変更

部分集合の定義から

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A\cap B}$	~~$X \in 2^A \cap 2^B$~~
$X \subseteq A \cap B$	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in A \cap B)$	~~$X \in 2^A$~~
	~~$X \subseteq A$~~
	$\forall\, y\ (y \in X \to y \in A)$

「$2^{A\cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：表の変更

導く性質に $\forall$ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A\cap B}$	~~$X \in 2^A \cap 2^B$~~
$X \subseteq A \cap B$	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in A \cap B)$	~~$X \in 2^A$~~
	~~$X \subseteq A$~~
	~~$\forall\, y\ (y \in X \to y \in A)$~~
	$y \in X \to y \in A$

「$2^{A\cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：表の変更

導く性質に $\to$ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A\cap B}$	~~$X \in 2^A \cap 2^B$~~
$X \subseteq A \cap B$	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in A \cap B)$	~~$X \in 2^A$~~
$y \in X$	~~$X \subseteq A$~~
	~~$\forall\, y\ (y \in X \to y \in A)$~~
	~~$y \in X \to y \in A$~~
	$y \in A$

「$2^{A\cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：証明の雛形の変更

$X \in 2^{A\cap B}$ と仮定する．

まず，$X \in 2^A$ を証明する．

冪集合の定義から，$X \subseteq A \cap B$ となる．

任意の y を選ぶ．$y \in X$ と仮定する．

ここで，$y \in A$ を結論として導く．

したがって，$X \subseteq A$ となる．

冪集合の定義から，$X \in 2^A$ となる．

「$2^{A\cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：表の変更

使える性質に $\forall$ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A\cap B}$	~~$X \in 2^A \cap 2^B$~~
$X \subseteq A \cap B$	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
$\forall\, x\ (x \in X \to x \in A \cap B)$	~~$X \in 2^A$~~
$y \in X$	~~$X \subseteq A$~~
$y \in X \to y \in A \cap B$	~~$\forall\, y\ (y \in X \to y \in A)$~~
	~~$y \in X \to y \in A$~~
	$y \in A$

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：証明の雛形の変更

$X \in 2^{A \cap B}$ と仮定する．

まず，$X \in 2^A$ を証明する．

冪集合の定義から，$X \subseteq A \cap B$ となる．

任意の y を選ぶ．$y \in X$ と仮定する．

$X \subseteq A \cap B$ から,「$y \in X$ ならば $y \in A \cap B$」となる．
ここで，$y \in A$ を結論として導く．

したがって，$X \subseteq A$ となる．

冪集合の定義から，$X \in 2^A$ となる．

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：表の変更

任意の y に対して

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A \cap B}$	~~$X \in 2^A \cap 2^B$~~
$X \subseteq A \cap B$	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
$\forall x\ (x \in X \to x \in A \cap B)$	~~$X \in 2^A$~~
$y \in X$	~~$X \subseteq A$~~
$y \in X \to y \in A \cap B$	~~$\forall y\ (y \in X \to y \in A)$~~
	~~$y \in X \to y \in A$~~
	$y \in A$

テンプレート：使える性質に $\to$ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$P \to Q$	○○○
P	

変更後

使える性質	導く性質
$P \to Q$	○○○
P	
Q	

次の恒真式に基づく (モードゥス・ポネンス)

$$((P \to Q) \land P) \to Q$$

テンプレート：使える性質に $\to$ があるとき (証明の雛形)

$P \to Q$ と P から，Q となる．
ここで「○○○」を結論として導く．

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：表の変更

使える性質に $\to$ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A \cap B}$	~~$X \in 2^A \cap 2^B$~~
$X \subseteq A \cap B$	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
$\forall x\ (x \in X \to x \in A \cap B)$	~~$X \in 2^A$~~
$y \in X$	~~$X \subseteq A$~~
$y \in X \to y \in A \cap B$	~~$\forall y\ (y \in X \to y \in A)$~~
$y \in A \cap B$	~~$y \in X \to y \in A$~~
	$y \in A$

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：証明の雛形の変更

$X \in 2^{A \cap B}$ と仮定する．

まず，$X \in 2^A$ を証明する．

冪集合の定義から，$X \subseteq A \cap B$ となる．

任意の y を選ぶ．$y \in X$ と仮定する．

$X \subseteq A \cap B$ から,「$y \in X$ ならば $y \in A \cap B$」となる．
さらに，$y \in X$ から，$y \in A \cap B$ となる．
ここで，$y \in A$ を結論として導く．

したがって，$X \subseteq A$ となる．

冪集合の定義から，$X \in 2^A$ となる．

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：表の変更

共通部分の定義から
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A \cap B}$	~~$X \in 2^A \cap 2^B$~~
$X \subseteq A \cap B$	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
$\forall x\ (x \in X \to x \in A \cap B)$	~~$X \in 2^A$~~
$y \in X$	~~$X \subseteq A$~~
$y \in X \to y \in A \cap B$	~~$\forall y\ (y \in X \to y \in A)$~~
$y \in A \cap B$	~~$y \in X \to y \in A$~~
$y \in A$ かつ $y \in B$	$y \in A$

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：表の変更

使える性質に $\land$ があるときのテンプレートから
任意の y に対して

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A \cap B}$	~~$X \in 2^A \cap 2^B$~~
$X \subseteq A \cap B$	~~$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$~~
$\forall x\ (x \in X \to x \in A \cap B)$	~~$X \in 2^A$~~
$y \in X$	~~$X \subseteq A$~~
$y \in X \to y \in A \cap B$	~~$\forall y\ (y \in X \to y \in A)$~~
$y \in A \cap B$	~~$y \in X \to y \in A$~~
$y \in A$ かつ $y \in B$	$y \in A$
$y \in A$	
$y \in B$	

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の前半：証明の雛形の変更

$X \in 2^{A \cap B}$ と仮定する．

まず，$X \in 2^A$ を証明する．

冪集合の定義から，$X \subseteq A \cap B$ となる．

任意の y を選ぶ．$y \in X$ と仮定する．

$X \subseteq A \cap B$ から，「$y \in X$ ならば $y \in A \cap B$」となる．
さらに，$y \in X$ から，$y \in A \cap B$ となる．
共通部分の定義から，$y \in A$ かつ $y \in B$ となる．
よって，$y \in A$ となる．

したがって，$X \subseteq A$ となる．

冪集合の定義から，$X \in 2^A$ となる．

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明の後半：表

使える性質	導く性質
$X \in 2^{A \cap B}$	$X \in 2^B$

前半と同じように証明できる

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明：清書 (1)

- 部分集合の定義から「$X \in 2^{A \cap B}$ ならば $X \in 2^A \cap 2^B$」を証明すればよい．
- $X \in 2^{A \cap B}$ と仮定する．

- まず，$X \in 2^A$ を証明する．
- 冪集合の定義から，$X \subseteq A \cap B$ となる．
- 任意の y を選ぶ．
- $y \in X$ と仮定する．
- $X \subseteq A \cap B$ から，「$y \in X$ ならば $y \in A \cap B$」となる．
- さらに，$y \in X$ から，$y \in A \cap B$ となる．
- 共通部分の定義から，$y \in A$ かつ $y \in B$ となる．
- よって，$y \in A$ となる．
- したがって，$X \subseteq A$ となる．
- 冪集合の定義から，$X \in 2^A$ となる．

「$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$」の証明：清書 (2)

- 次に，$X \in 2^B$ を証明する．
- 冪集合の定義から，$X \subseteq A \cap B$ となる．
- 任意の y を選ぶ．
- $y \in X$ と仮定する．
- $X \subseteq A \cap B$ から，「$y \in X$ ならば $y \in A \cap B$」となる．
- さらに，$y \in X$ から，$y \in A \cap B$ となる．
- 共通部分の定義から，$y \in A$ かつ $y \in B$ となる．
- よって，$y \in B$ となる．
- したがって，$X \subseteq A$ となる．
- 冪集合の定義から，$X \in 2^A$ となる．

- したがって，$X \in 2^A$ かつ $X \in 2^B$ となる．

- 共通部分の定義から，$X \in 2^A \cap 2^B$ となる．
- したがって，$2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$ となる． □

目次

今日のまとめ

集合の演算
- 集合の直積 (対を作る)
- 冪集合 (部分集合全体の集合)

証明の作り方
- 「使える性質」と「導く性質」を把握して，書き下す
- 表と証明の雛形を変更する (同値変形，推論，定義)
- 証明を清書する