離散数学 第 4 回
集合 (2)：論理を用いた証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 5 月 8 日

最終更新：2012 年 5 月 15 日　23:27

概要

今日の目標
- 「論理を用いた証明」の骨格を理解する
- 「論理を用いた証明」を書けるようになる

いままでの 3 回の講義の内容を全部使う

目次

1. 部分集合の定義 再考
2. 証明とその手順
3. 実際にやってみる：最初の例
4. 表と証明の雛形の変更：テンプレート
   - 例題 1
   - 例題 2
5. 今日のまとめ

部分集合の定義 (再掲)

部分集合の定義 (再掲)

A が B の部分集合であるとは，どの x に対しても次が成り立つこと

$$x \in A \text{ ならば } x \in B$$

「$\forall x\ ((x \in A) \to (x \in B))$」ということ

部分集合の表記法

A が B の部分集合であることを「$A \subseteq B$」と表記する

「$A \subset B$」や「$A \subseteqq B$」と表記することもある

部分集合ではないこと

定義から導かれる性質

A が B の部分集合ではないとは，ある x に対して次が成り立つこと

$$x \in A \text{ かつ } x \notin B$$

同値変形による証明

$\neg(\forall x\ ((x \in A) \to (x \in B)))$

$\leftrightarrow\ \neg(\forall x\ (\neg(\neg(x \in A) \vee (x \in B)))$　(含意の除去)

$\leftrightarrow\ \exists x\ (\neg(\neg(x \in A) \vee (x \in B)))$　($\forall$ の否定)

$\leftrightarrow\ \exists x\ (\neg\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)))$　(ド・モルガンの法則)

$\leftrightarrow\ \exists x\ ((x \in A) \wedge \neg(x \in B)))$　(二重否定の除去)

部分集合ではないこと (続)

定義から導かれる性質

A が B の部分集合ではないとは，ある x に対して次が成り立つこと

$$x \in A \text{ かつ } x \notin B$$

部分集合ではないことの記法

A が B の部分集合ではないことを次のように書く

$$A \not\subseteq B$$

真部分集合

真部分集合とは？ (定義)

A が B の真部分集合であるとは，次が成り立つこと

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \not\subseteq A$$

真部分集合であることの記法

A が B の真部分集合であることを次のように書く

$$A \subsetneq B$$

「$A \subset B$」と書くこともある (が紛らわしいのでやらない方がよい)

空集合であること

空集合とは？ (論理による定義)

A が空集合であるとは，次が成り立つこと

$$\text{任意の } x \text{ に対して，} x \notin A$$

- 記号で書けば「$\forall x\ (x \notin A)$」
- $\exists$ の否定より，これは「$\neg\exists x\ (x \in A)$」と同値

目次

1. 部分集合の定義 再考
2. **証明とその手順**
3. 実際にやってみる：最初の例
4. 表と証明の雛形の変更：テンプレート
   - 例題 1
   - 例題 2
5. 今日のまとめ

とりあえず，証明を見てみる (再掲)

証明してみること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

証明：

- $x \in A \cap B$ と仮定する．
- 共通部分の定義より，$x \in A$ かつ $x \in B$．
- よって，$x \in A$ が成り立つ．
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成り立つ． □

疑問？

これは何？

証明とは？ (再掲)

証明とは？ (常識に基づく定義)

定義と前提に基づき，推論を重ねて，結論を導くこと

「結論を導く」とは？

「『前提』ならば『結論』」という命題が恒真命題であることを示すこと

証明してみること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

これはどういう命題なのか？ 定義に戻って書き直す

書き直した結果 (の途中)

$$x \in A \cap B \text{ ならば } x \in A$$

前提が「$x \in A \cap B$」，結論が「$x \in A$」

もう一度，先ほどの証明を見てみる

証明：

- $x \in A \cap B$ と仮定する． ←前提を使っている
- 共通部分の定義より，$x \in A$ かつ $x \in B$．
- よって，$x \in A$ が成り立つ． ←結論を導いている
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成り立つ． □

証明の書き方について

真理値表や同値変形で恒真性を示しているわけではない

なぜ？

- そのような手法で示せるとは限らないから
- そのような手法で書いた証明は人間が読みにくいから

人間が読めるように文章として書くことが重要！

格言

証明は考えを伝えるための，書き手と読み手のコミュニケーション．

どうやって証明を書けばいいのか？

訓練が必要 !!!!!

この授業で薦める手順

1. 下書きから構造を掴む
2. その構造をそのまま証明の文章として清書する

この講義でやる「証明の書き方」については以下の本を参考にする

- 松井知己,『だれでも証明が書ける』，日本評論社，2010 年
- Daniel J. Velleman, "How to Prove It (Second Edition)", Cambridge University Press, 2006

実際に証明をする前に，用語と記法を先に…

必要条件，十分条件

- 「$P \to Q$」が恒真であるとき，これを次のように書くことがある

$$P \Rightarrow Q$$

- 「$P \Rightarrow Q$」において，次の用語を使うことがある
  - P は「Q が成り立つための十分条件」
  - Q は「P が成り立つための必要条件」

必要十分条件

- 「$P \leftrightarrow Q$」が恒真であるとき，これを次のように書くことがある

$$P \Leftrightarrow Q$$

- 「$P \Leftrightarrow Q$」において，次の用語を使うことがある
  - P を「Q が成り立つための必要十分条件」
  - Q を「P が成り立つための必要十分条件」

目次

1. 部分集合の定義 再考
2. 証明とその手順
3. **実際にやってみる：最初の例**
4. 表と証明の雛形の変更：テンプレート
   - 例題 1
   - 例題 2
5. 今日のまとめ

実際にやってみる

証明してみること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

これはどういう命題なのか？ 定義に戻って書き直す

書き直した結果 (の途中)

$$x \in A \cap B \text{ ならば } x \in A$$

前提が「$x \in A \cap B$」，結論が「$x \in A$」

やってみること

「前提 $\Rightarrow$ 結論」を証明するために

- 恒真命題や推論を用いて，これを書き換える
- 式で書いていくのは見にくいので，表で書く

証明の雛形 (ひながた)

部分集合の定義より，「$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．

> ここで「$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$」を結論として導く．

したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成立する．□

表

使える性質	導く性質
$x \in A \cap B$	$x \in A$

これは

$$(x \in A \cap B) \to (x \in A)$$

を表にして書いたもの (だと見なす)

証明の雛形の変更

部分集合の定義より，「$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．

> $x \in A \cap B$ であると仮定する．
>
> > ここで「$x \in A$」を結論として導く．
>
> したがって，$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ となる．

したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成立する．□

表の変更

使える性質	導く性質
$x \in A \cap B$	$x \in A$
$x \in A$ **かつ** $x \in B$	

これは

$$((x \in A) \land (x \in B)) \to (x \in A)$$

を表にして書いたもの (だと見なす)

証明の雛形の変更

部分集合の定義より，「$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．

> $x \in A \cap B$ であると仮定する．
>
> > 共通部分の定義から，$x \in A$ かつ $x \in B$ となる．
> > ここで「$x \in A$」を結論として導く．
>
> したがって，$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ となる．

したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成立する．□

表の変更

使える性質	導く性質
$x \in A \cap B$	$x \in A$
$x \in A$ **かつ** $x \in B$	
$x \in A$	
$x \in B$	

これは

$$((x \in A) \land (x \in B)) \to (x \in A)$$

を表にして書いたもの (だと見なす)

証明の雛形の変更

部分集合の定義より，「$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．

> $x \in A \cap B$ であると仮定する．
>
> > 共通部分の定義から，$x \in A$ かつ $x \in B$ となる．
> > よって，$x \in A$ となる．
>
> したがって，$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ となる．

したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成立する．□

証明の清書：文章として書く

証明：
部分集合の定義より，「$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．
$x \in A \cap B$ であると仮定する．共通部分の定義から，$x \in A$ かつ $x \in B$ となる．よって，$x \in A$ となる．したがって，$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ となる．
したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成立する．□

証明の清書：文章として書く (読みにくいのでスライドでは整理)

証明：

- 部分集合の定義より，「$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．
- $x \in A \cap B$ であると仮定する．
- 共通部分の定義から，$x \in A$ かつ $x \in B$ となる．
- よって，$x \in A$ となる．
- したがって，$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$ となる．
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成立する． □

今の例で行っていること

1. 表に「使える性質」と「導く性質」を分けて書く
   1. 前提は「使える性質」に書く
   2. 結論は「導く性質」に書く
2. 同値変形，推論，定義を用いて，表を変更する
   1. 表の変更に伴って，証明の雛形も変更する
3. 「使える性質」に「導く性質」が現れたら，証明終了！
4. 証明の雛形に沿って，証明を清書する

推論とは？

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「$P \rightarrow Q$」が恒真であるとき，
使える性質の中の P を Q で置き換えること

注意：「導く性質の P」を Q で置き換えてはいけない

重要な性質

置換前の論理式が真であるとき，置換後の論理式も真である

表の書き方に関する注意

- 「使える性質」に書けるもの
  - 前提
  - 定義
  - 恒真であると既に証明されている命題 (定理と呼ぶ)
- 「導く性質」は必ず 1 つだけ

目次

1. 部分集合の定義 再考
2. 証明とその手順
3. 実際にやってみる：最初の例
4. 表と証明の雛形の変更：テンプレート
   例題 1
   例題 2
5. 今日のまとめ

表と証明の雛形の変更：テンプレート

次のような場合にどういう変更を行えばいいか？

$$\left\{\begin{array}{l}\text{使える性質}\\ \text{導く性質}\end{array}\right\} \text{に} \left\{\begin{array}{c}\wedge\\ \rightarrow\\ \vee\\ \neg\\ \forall\\ \exists\end{array}\right\} \text{があるとき}$$

- このそれぞれに対して「テンプレート」を与える
- テンプレートに沿って証明の例をもっと見てみる

テンプレート：使える性質に $\wedge$ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$P \wedge Q$	○○○

変更後

使える性質	導く性質
$P \wedge Q$	○○○
P	
Q	

証明の雛形に変更はない

例題 1

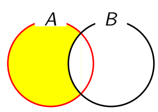
例題 1：次を証明せよ

集合 A, B に対して，

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

が成立する．

オイラー図による直観



部分集合の定義より，証明することは次と同じ

$$x \in (A \cup B) - B \text{ ならば } x \in A$$

例題 1：表

使える性質	導く性質
$x \in (A \cup B) - B$	$x \in A$

例題 1：証明の雛形

部分集合の定義より，「$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．

$x \in (A \cup B) - B$ であると仮定する．

ここで「$x \in A$」を結論として導く．

したがって，「$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$」となる．

したがって，$(A \cup B) - B \subseteq A$ となる．□

例題 1：表の変更

差集合の定義から

使える性質	導く性質
$x \in (A \cup B) - B$	$x \in A$
$x \in A \cup B \wedge x \notin B$	

例題 1：表の変更

使える性質に $\wedge$ があるときのテンプレートから

使える性質	導く性質
$x \in (A \cup B) - B$	$x \in A$
$x \in A \cup B \wedge x \notin B$	
$x \in A \cup B$	
$x \notin B$	

例題 1：証明の雛形の変更

部分集合の定義より，「$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．

$x \in (A \cup B) - B$ であると仮定する．

差集合の定義から，$x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$ となる．
ここで「$x \in A$」を結論として導く．

したがって，「$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$」となる．

したがって，$(A \cup B) - B \subseteq A$ となる．□

例題 1：表の変更

合併の定義から

使える性質	導く性質
$x \in (A \cup B) - B$	$x \in A$
$x \in A \cup B \wedge x \notin B$	
$x \in A \cup B$	
$x \notin B$	
$x \in A \vee x \in B$	

例題 1：証明の雛形の変更

部分集合の定義より，「$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．

$x \in (A \cup B) - B$ であると仮定する．

差集合の定義から，$x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$ となる．
合併の定義から，$x \in A$ または $x \in B$ となる．
ここで「$x \in A$」を結論として導く．

したがって，「$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$」となる．

したがって，$(A \cup B) - B \subseteq A$ となる．□

例題 1：表の変更

使える性質	導く性質
$x \in (A \cup B) - B$	$x \in A$
$x \in A \cup B \wedge x \notin B$	
$x \in A \cup B$	
$x \notin B$	
$x \in A \vee x \in B$	

次の推論を使う (この推論の正しさの確認は演習問題)

$$(\neg P \wedge (P \vee Q)) \Rightarrow Q$$

テンプレート：使える性質に $\vee$ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$\neg P$	○○○
$P \vee Q$	

変更後

使える性質	導く性質
$\neg P$	○○○
$P \vee Q$	
Q	

この推論は選言三段論法とも呼ばれる．

テンプレート：使える性質に $\vee$ があるとき (証明の雛形)

$\neg P$ と $P \vee Q$ より，Q が成り立つ．
ここで「○○○」を結論として導く．

例題 1：表の変更

使える性質に $\vee$ があるときのテンプレート (選言三段論法) から

使える性質	導く性質
$x \in (A \cup B) - B$	$x \in A$
$x \in A \cup B \wedge x \notin B$	
$x \in A \cup B$	
$x \notin B$	
$x \in A \vee x \in B$	
$x \in A$	

例題 1：証明の雛形の変更

部分集合の定義より，「$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．

$x \in (A \cup B) - B$ であると仮定する．

差集合の定義から，$x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$ となる．
合併の定義から，$x \in A$ または $x \in B$ となる．
$x \notin B$ と「$x \in A$ または $x \in B$」から，$x \in A$ となる．

したがって，「$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$」となる．

したがって，$(A \cup B) - B \subseteq A$ となる．□

例題 1：証明の清書

証明：
- 部分集合の定義より，「$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$」を証明すればよい．
- $x \in (A \cup B) - B$ であると仮定する．
- 差集合の定義から，$x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$ となる．
- 合併の定義から，$x \in A$ または $x \in B$ となる．
- $x \notin B$ と「$x \in A$ または $x \in B$」から，$x \in A$ となる．
- したがって，「$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$」となる．
- したがって，$(A \cup B) - B \subseteq A$ となる．□

表と証明の雛形の変更：テンプレート

ここまでに登場したテンプレート

	$\wedge$	$\to$	$\vee$	$\neg$	$\forall$	$\exists$
使える性質	済		済			
導く性質						

例題 2

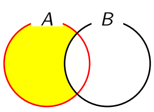
例題 2：次を証明せよ

集合 A, B に対して，

$$A - (A \cap B) = A - B$$

が成立する．

オイラー図による直観



$=$ の定義より，証明することは次と同じ

$$A - (A \cap B) \subseteq A - B \text{ かつ } A - B \subseteq A - (A \cap B)$$

例題 2：表

使える性質	導く性質
	$(A - (A \cap B) \subseteq A - B) \wedge (A - B \subseteq A - (A \cap B))$

例題 2：証明の雛形

「=」の定義より，「$A-(A\cap B)\subseteq A-B$ かつ $A-B\subseteq A-(A\cap B)$」を証明すればよい．

> ここで「$A-(A\cap B)\subseteq A-B$ かつ $A-B\subseteq A-(A\cap B)$」を結論として導く．

したがって，$A-(A\cap B)=A-B$ となる． □

例題 2：表

使える性質	導く性質
	$(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\wedge(A-B\subseteq A-(A\cap B))$

テンプレート：導く性質に ∧ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
○○○	$P\wedge Q$

変更後

使える性質	導く性質
○○○	$\cancel{P\wedge Q}$
	P

と

使える性質	導く性質
○○○	Q

テンプレート：導く性質に ∧ があるとき (証明の雛形)

まず P を示す．

> ここで「P」を結論として導く．

次に Q を示す．

> ここで「Q」を結論として導く．

したがって，$P\wedge Q$ が成立する．

例題 2：表の変更

導く性質に ∧ があるときのテンプレートから

使える性質	導く性質
	$\cancel{(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\wedge(A-B\subseteq A-(A\cap B))}$
	$A-(A\cap B)\subseteq A-B$

と

使える性質	導く性質
	$A-B\subseteq A-(A\cap B)$

例題 2：証明の雛形の変更

「=」の定義より，「$A-(A\cap B)\subseteq A-B$ かつ $A-B\subseteq A-(A\cap B)$」を証明すればよい．

> まず $A-(A\cap B)\subseteq A-B$ を示す．
>
> > ここで $A-(A\cap B)\subseteq A-B$ を結論として導く．
>
> 次に $A-B\subseteq A-(A\cap B)$ を示す．
>
> > ここで $A-B\subseteq A-(A\cap B)$ を結論として導く．

したがって，$A-(A\cap B)=A-B$ となる． □

例題 2 (前半)：表の変更

部分集合の定義から

使える性質	導く性質
	$\cancel{(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\wedge(A-B\subseteq A-(A\cap B))}$
	$\cancel{A-(A\cap B)\subseteq A-B}$
	$(x\in A-(A\cap B))\rightarrow(x\in A-B)$

例題 2 (前半)：証明の雛形の変更

…

> まず $A-(A\cap B)\subseteq A-B$ を示す．
>
> > 部分集合の定義から，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」を示せばよい．
> >
> > > ここで「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」を結論として導く．
> >
> > したがって，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」となる．
>
> …

…

例題 2 (前半)：表の変更

使える性質	導く性質
	$\cancel{(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\land(A-B\subseteq A-(A\cap B))}$
	$\cancel{A-(A\cap B)\subseteq A-B}$
	$(x\in A-(A\cap B))\to(x\in A-B)$

テンプレート：導く性質に → があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
○○○	$P\to Q$

変更後

使える性質	導く性質
○○○	$\cancel{P\to Q}$
P	Q

これは

$$(○○○\to(P\to Q))\Leftrightarrow((○○○\land P)\to Q)$$

に基づく変更 (参照：第 1 回 追加問題 1.5.2)

テンプレート：導く性質に → があるとき (証明の雛形)

> P とする．
>
> > ここで「Q」を結論として導く．

例題 2 (前半)：表の変更

導く性質に → があるときのテンプレートから

使える性質	導く性質
$x\in A-(A\cap B)$	$\cancel{(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\land(A-B\subseteq A-(A\cap B))}$
	$\cancel{A-(A\cap B)\subseteq A-B}$
	$\cancel{(x\in A-(A\cap B))\to(x\in A-B)}$
	$x\in A-B$

例題 2 (前半)：証明の雛形の変更

> …
>
> > まず $A-(A\cap B)\subseteq A-B$ を示す．
> >
> > > 部分集合の定義から，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」を示せばよい．
> > >
> > > > $x\in A-(A\cap B)$ であると仮定する．
> > > >
> > > > > ここで「$x\in A-B$」を結論として導く．
> > >
> > > したがって，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」となる．
> >
> > …
>
> …

例題 2 (前半)：表の変更

差集合の定義から

使える性質	導く性質
$x\in A-(A\cap B)$	$\cancel{(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\land(A-B\subseteq A-(A\cap B))}$
$x\in A\land x\notin A\cap B$	$\cancel{A-(A\cap B)\subseteq A-B}$
	$\cancel{(x\in A-(A\cap B))\to(x\in A-B)}$
	$x\in A-B$

例題 2 (前半)：表の変更

使える性質に ∧ があるときのテンプレートから

使える性質	導く性質
$x\in A-(A\cap B)$	$\cancel{(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\land(A-B\subseteq A-(A\cap B))}$
$x\in A\land x\notin A\cap B$	$\cancel{A-(A\cap B)\subseteq A-B}$
$x\in A$	$\cancel{(x\in A-(A\cap B))\to(x\in A-B)}$
$x\notin A\cap B$	$x\in A-B$

例題 2 (前半)：証明の雛形の変更

> …
>
> > まず $A-(A\cap B)\subseteq A-B$ を示す．
> >
> > > 部分集合の定義から，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」を示せばよい．
> > >
> > > > $x\in A-(A\cap B)$ であると仮定する．
> > > >
> > > > > 差集合の定義から，$x\in A$ かつ $x\notin A\cap B$ となる．
> > > > > ここで「$x\in A-B$」を結論として導く．
> > >
> > > したがって，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」となる．
> >
> > …
>
> …

例題 2 (前半)：表の変更

$\notin$ の定義から

使える性質	導く性質
$x \in A-(A\cap B)$	~~$(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\land(A-B\subseteq A-(A\cap B))$~~
$x \in A \land x \notin A\cap B$	~~$A-(A\cap B)\subseteq A-B$~~
$x \in A$	~~$(x\in A-(A\cap B))\to(x\in A-B)$~~
$x \notin A\cap B$	$x\in A-B$
$\neg(x\in A\cap B)$	

例題 2 (前半)：表の変更

共通部分の定義から

使える性質	導く性質
$x \in A-(A\cap B)$	~~$(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\land(A-B\subseteq A-(A\cap B))$~~
$x \in A \land x \notin A\cap B$	~~$A-(A\cap B)\subseteq A-B$~~
$x \in A$	~~$(x\in A-(A\cap B))\to(x\in A-B)$~~
$x \notin A\cap B$	$x\in A-B$
$\neg(x\in A\cap B)$	
$\neg(x\in A\land x\in B)$	

例題 2 (前半)：表の変更

ド・モルガンの法則から (同値変形)

使える性質	導く性質
$x \in A-(A\cap B)$	~~$(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\land(A-B\subseteq A-(A\cap B))$~~
$x \in A \land x \notin A\cap B$	~~$A-(A\cap B)\subseteq A-B$~~
$x \in A$	~~$(x\in A-(A\cap B))\to(x\in A-B)$~~
$x \notin A\cap B$	$x\in A-B$
$\neg(x\in A\cap B)$	
$\neg(x\in A\land x\in B)$	
$x\notin A\lor x\notin B$	

例題 2 (前半)：証明の雛形の変更

まず $A-(A\cap B)\subseteq A-B$ を示す．

部分集合の定義から，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」を示せばよい．

$x\in A-(A\cap B)$ であると仮定する．

差集合の定義から，$x\in A$ かつ $x\notin A\cap B$ となる．
共通部分の定義とド・モルガンの法則から，$x\notin A$ または $x\notin B$ となる．
ここで「$x\in A-B$」を結論として導く．

したがって，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」となる．

例題 2 (前半)：表の変更

使える性質に $\lor$ があるときのテンプレート (選言三段論法) から

使える性質	導く性質
$x \in A-(A\cap B)$	~~$(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\land(A-B\subseteq A-(A\cap B))$~~
$x \in A \land x \notin A\cap B$	~~$A-(A\cap B)\subseteq A-B$~~
$x \in A$	~~$(x\in A-(A\cap B))\to(x\in A-B)$~~
$x \notin A\cap B$	$x\in A-B$
$\neg(x\in A\cap B)$	
$\neg(x\in A\land x\in B)$	
$x\notin A\lor x\notin B$	
$x\notin B$	

例題 2 (前半)：証明の雛形の変更

まず $A-(A\cap B)\subseteq A-B$ を示す．

部分集合の定義から，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」を示せばよい．

$x\in A-(A\cap B)$ であると仮定する．

差集合の定義から，$x\in A$ かつ $x\notin A\cap B$ となる．
共通部分の定義とド・モルガンの法則から，$x\notin A$ または $x\notin B$ となる．
$x\in A$ と「$x\notin A$ または $x\notin B$」から，$x\notin B$ となる．
ここで「$x\in A-B$」を結論として導く．

したがって，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」となる．

例題 2 (前半)：表の変更

差集合の定義から

使える性質	導く性質
$x \in A-(A\cap B)$	~~$(A-(A\cap B)\subseteq A-B)\land(A-B\subseteq A-(A\cap B))$~~
$x \in A \land x \notin A\cap B$	~~$A-(A\cap B)\subseteq A-B$~~
$x \in A$	~~$(x\in A-(A\cap B))\to(x\in A-B)$~~
$x \notin A\cap B$	$x\in A-B$
$\neg(x\in A\cap B)$	
$\neg(x\in A\land x\in B)$	
$x\notin A\lor x\notin B$	
$x\notin B$	
$x\in A-B$	

例題 2 (前半)：証明の雛形の変更

まず $A-(A\cap B)\subseteq A-B$ を示す．

部分集合の定義から，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」を示せばよい．

$x\in A-(A\cap B)$ であると仮定する．

差集合の定義から，$x\in A$ かつ $x\notin A\cap B$ となる．
共通部分の定義とド・モルガンの法則から，$x\notin A$ または $x\notin B$ となる．
$x\in A$ と「$x\notin A$ または $x\notin B$」から，$x\notin B$ となる．
$x\in A$，$x\notin B$ と差集合の定義から，$x\in A-B$ となる．

したがって，「$x\in A-(A\cap B)$ ならば $x\in A-B$」となる．

例題 2：証明の雛形

「=」の定義より，「$A - (A \cap B) \subseteq A - B$ かつ $A - B \subseteq A - (A \cap B)$」を証明すればよい．

まず $A - (A \cap B) \subseteq A - B$ を示す．

ここで $A - (A \cap B) \subseteq A - B$ を結論として導いた．

次に $A - B \subseteq A - (A \cap B)$ を示す．

ここで $A - B \subseteq A - (A \cap B)$ を結論として導く．

したがって，$A - (A \cap B) = A - B$ となる．　□

例題 2 (後半)：表

使える性質	導く性質
	$A - B \subseteq A - (A \cap B)$

例題 2 (後半)：表の変更

部分集合の定義から

使える性質	導く性質
	$\cancel{A - B \subseteq A - (A \cap B)}$
	$x \in A - B \rightarrow x \in A - (A \cap B)$

例題 2 (後半)：証明の雛形の変更

...

...

次に $A - B \subseteq A - (A \cap B)$ を示す．

部分集合の定義から，「$x \in A - B$ ならば $x \in A - (A \cap B)$」を示せばよい．

ここで「$x \in A - B$ ならば $x \in A - (A \cap B)$」を結論として導く．

...

例題 2 (後半)：表の変更

使える性質	導く性質
	$\cancel{A - B \subseteq A - (A \cap B)}$
	$x \in A - B \rightarrow x \in A - (A \cap B)$

テンプレート：導く性質に → があるとき Part II (表)

変更前

使える性質	導く性質
○○○	$P \rightarrow Q$

変更後

使える性質	導く性質
○○○	$\cancel{P \rightarrow Q}$
$\neg Q$	$\neg P$

これは対偶による証明とも呼ばれる証明手法

対偶法則 (第 1 回の「重要な恒真命題」)

$$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

テンプレート：導く性質に → があるとき Part II (証明の雛形)

対偶による証明を行うために，$\neg Q$ を仮定する．

ここで $\neg P$ を結論として導く．

したがって，$P \rightarrow Q$ が成立する．

例題 2 (後半)：表の変更

対偶法則から

使える性質	導く性質
$x \notin A - (A \cap B)$	$\cancel{A - B \subseteq A - (A \cap B)}$
	$\cancel{x \in A - B \rightarrow x \in A - (A \cap B)}$
	$x \notin A - B$

例題 2 (後半)：証明の雛形の変更

> …
>
> > …
> >
> > 次に $A - B \subseteq A - (A \cap B)$ を示す．
> >
> > > 部分集合の定義から，「$x \in A - B$ ならば $x \in A - (A \cap B)$」を示せばよい．
> > >
> > > > 対偶による証明を行うために，$x \notin A - (A \cap B)$ であると仮定する．
> > > >
> > > > > ここで $x \notin A - B$ を結論として導く．
>
> …

例題 2 (後半)：表の変更

$\notin$ の定義から

使える性質	導く性質
$x \notin A - (A \cap B)$	~~$A - B \subseteq A - (A \cap B)$~~
$\neg(x \in A - (A \cap B))$	~~$x \in A - B \to x \in A - (A \cap B)$~~
	$x \notin A - B$

例題 2 (後半)：表の変更

差集合の定義から

使える性質	導く性質
$x \notin A - (A \cap B)$	~~$A - B \subseteq A - (A \cap B)$~~
$\neg(x \in A - (A \cap B))$	~~$x \in A - B \to x \in A - (A \cap B)$~~
$\neg(x \in A \land x \notin A \cap B)$	$x \notin A - B$

例題 2 (後半)：表の変更

ド・モルガンの法則から

使える性質	導く性質
$x \notin A - (A \cap B)$	~~$A - B \subseteq A - (A \cap B)$~~
$\neg(x \in A - (A \cap B))$	~~$x \in A - B \to x \in A - (A \cap B)$~~
$\neg(x \in A \land x \notin A \cap B)$	$x \notin A - B$
$x \notin A \lor x \in A \cap B$	

例題 2 (後半)：表の変更

同じように，導く性質を書き換える

使える性質	導く性質
$x \notin A - (A \cap B)$	~~$A - B \subseteq A - (A \cap B)$~~
$\neg(x \in A - (A \cap B))$	~~$x \in A - B \to x \in A - (A \cap B)$~~
$\neg(x \in A \land x \notin A \cap B)$	~~$x \notin A - B$~~
$x \notin A \lor x \in A \cap B$	$x \notin A \lor x \in B$

例題 2 (後半)：証明の雛形の変更

> …
>
> 次に $A - B \subseteq A - (A \cap B)$ を示す．
>
> > 部分集合の定義から，「$x \in A - B$ ならば $x \in A - (A \cap B)$」を示せばよい．
> >
> > > 対偶による証明を行うために，$x \notin A - (A \cap B)$ であると仮定する．
> > >
> > > > 定義とド・モルガンの法則から，$x \notin A$ または $x \in A \cap B$ となる．
> > > > ここで「$x \notin A$ または $x \in B$」を結論として導く．
> > > > 定義とド・モルガンの法則から，$x \notin A - B$ となる．

例題 2 (後半)：表の変更

使える性質	導く性質
$x \notin A - (A \cap B)$	~~$A - B \subseteq A - (A \cap B)$~~
$\neg(x \in A - (A \cap B))$	~~$x \in A - B \to x \in A - (A \cap B)$~~
$\neg(x \in A \land x \notin A \cap B)$	~~$x \notin A - B$~~
$x \notin A \lor x \in A \cap B$	$x \notin A \lor x \in B$

テンプレート：導く性質に $\lor$ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
○○○	$P \lor Q$

変更後

使える性質	導く性質
○○○	~~$P \lor Q$~~
$\neg P$	Q

これは

$$(P \lor Q) \Leftrightarrow (\neg P \to Q)$$

に基づく変更 (含意の除去)

テンプレート：導く性質に ∨ があるとき (証明の雛形)

P ではないと仮定する．

ここで「Q」を結論として導く．

したがって，$P \vee Q$ が成立する．

例題 2 (後半)：表の変更

導く性質に ∨ があるときのテンプレートから

使える性質	導く性質
$x \notin A-(A\cap B)$	~~$A-B \subseteq A-(A\cap B)$~~
$\neg(x \in A-(A\cap B))$	~~$x \in A-B \to x \in A-(A\cap B)$~~
$\neg(x \in A \wedge x \notin A\cap B)$	~~$x \notin A-B$~~
$x \notin A \vee x \in A\cap B$	~~$x \notin A \vee x \in B$~~
$x \in A$	$x \in B$

例題 2 (後半)：証明の雛形の変更

定義とド・モルガンの法則から，$x \notin A$ または $x \in A\cap B$ となる．

$x \in A$ であると仮定する

ここで「$x \in B$」を結論として導く．

したがって，「$x \notin A$ または $x \in B$」となる．

例題 2 (後半)：表の変更

使える性質に ∨ があるときのテンプレート (選言三段論法) から

使える性質	導く性質
$x \notin A-(A\cap B)$	~~$A-B \subseteq A-(A\cap B)$~~
$\neg(x \in A-(A\cap B))$	~~$x \in A-B \to x \in A-(A\cap B)$~~
$\neg(x \in A \wedge x \notin A\cap B)$	~~$x \notin A-B$~~
$x \notin A \vee x \in A\cap B$	~~$x \notin A \vee x \in B$~~
$x \in A$	$x \in B$
$x \in A\cap B$	

例題 2 (後半)：証明の雛形の変更

定義とド・モルガンの法則から，$x \notin A$ または $x \in A\cap B$ となる．

$x \in A$ であると仮定する

$x \in A$ と「$x \notin A$ または $x \in A\cap B$」から，$x \in A\cap B$ となる．

ここで「$x \in B$」を結論として導く．

したがって，「$x \notin A$ または $x \in B$」となる．

例題 2 (後半)：表の変更

共通部分の定義から

使える性質	導く性質
$x \notin A-(A\cap B)$	~~$A-B \subseteq A-(A\cap B)$~~
$\neg(x \in A-(A\cap B))$	~~$x \in A-B \to x \in A-(A\cap B)$~~
$\neg(x \in A \wedge x \notin A\cap B)$	~~$x \notin A-B$~~
$x \notin A \vee x \in A\cap B$	~~$x \notin A \vee x \in B$~~
$x \in A$	$x \in B$
$x \in A\cap B$	
$x \in A \wedge x \in B$	

例題 2 (後半)：表の変更

使える性質に ∧ があるときのテンプレートから

使える性質	導く性質
$x \notin A-(A\cap B)$	~~$A-B \subseteq A-(A\cap B)$~~
$\neg(x \in A-(A\cap B))$	~~$x \in A-B \to x \in A-(A\cap B)$~~
$\neg(x \in A \wedge x \notin A\cap B)$	~~$x \notin A-B$~~
$x \notin A \vee x \in A\cap B$	~~$x \notin A \vee x \in B$~~
$x \in A$	$x \in B$
$x \in A\cap B$	
$x \in A \wedge x \in B$	
$x \in A$	
$x \in B$	

例題 2 (後半)：証明の雛形の変更

定義とド・モルガンの法則から，$x \notin A$ または $x \in A\cap B$ となる．

$x \in A$ であると仮定する

$x \in A$ と「$x \notin A$ または $x \in A\cap B$」から，$x \in A\cap B$ となる．

共通部分の定義から，$x \in B$ となる．

したがって，「$x \notin A$ または $x \in B$」となる．

例題 2：証明の雛形

「=」の定義より，「$A - (A \cap B) \subseteq A - B$ かつ $A - B \subseteq A - (A \cap B)$」を証明すればよい．

まず $A - (A \cap B) \subseteq A - B$ を示す．

ここで $A - (A \cap B) \subseteq A - B$ を結論として導いた．

次に $A - B \subseteq A - (A \cap B)$ を示す．

ここで $A - B \subseteq A - (A \cap B)$ を結論として導いた．

したがって，$A - (A \cap B) = A - B$ となる．□

例題 2：証明の清書 (1)

- 「=」の定義より，「$A - (A \cap B) \subseteq A - B$ かつ $A - B \subseteq A - (A \cap B)$」を証明すればよい．
- まず $A - (A \cap B) \subseteq A - B$ を示す．
- 部分集合の定義から，「$x \in A - (A \cap B)$ ならば $x \in A - B$」を示せばよい．
- $x \in A - (A \cap B)$ であると仮定する．
- 差集合の定義から，$x \in A$ かつ $x \notin A \cap B$ となる．
- 共通部分の定義とド・モルガンの法則から，$x \notin A$ または $x \notin B$ となる．
- $x \in A$ と「$x \notin A$ または $x \notin B$」から，$x \notin B$ となる．
- $x \in A$，$x \notin B$ と差集合の定義から，$x \in A - B$ となる．
- したがって，「$x \in A - (A \cap B)$ ならば $x \in A - B$」となる．

例題 2：証明の清書 (2)

- 次に $A - B \subseteq A - (A \cap B)$ を示す．
- 部分集合の定義から，「$x \in A - B$ ならば $x \in A - (A \cap B)$」を示せばよい．
- 対偶による証明を行うために，$x \notin A - (A \cap B)$ であると仮定する．
- 定義とド・モルガンの法則から，$x \notin A$ または $x \in A \cap B$ となる．
- $x \in A$ であると仮定する．
- $x \in A$ と「$x \notin A$ または $x \in A \cap B$」から，$x \in A \cap B$ となる．
- 共通部分の定義から，$x \in B$ となる．
- したがって，「$x \notin A$ または $x \in B$」となる．
- 定義とド・モルガンの法則から，$x \notin A - B$ となる．
- したがって，$A - (A \cap B) = A - B$ となる．□

表と証明の雛形の変更：テンプレート

ここまでに登場したテンプレート

	$\wedge$	$\rightarrow$	$\vee$	$\neg$	$\forall$	$\exists$
使える性質	済		済			
導く性質	済	済	済			

他の場合のテンプレートははじめて使うときに紹介する

目次

1 部分集合の定義 再考
2 証明とその手順
3 実際にやってみる：最初の例
4 表と証明の雛形の変更：テンプレート
例題 1
例題 2
5 今日のまとめ

今日のまとめ

証明の作り方

- 「使える性質」と「導く性質」を把握して，書き下す
- 表と証明の雛形を変更する (同値変形，推論，定義)
- 証明を清書する