離散数学 第 2 回
集合 (1)：集合とは何か

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 4 月 24 日

最終更新：2012 年 4 月 24 日　21:39

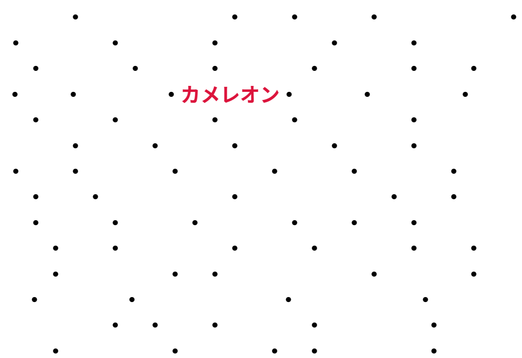
概要

今日の目標
- 命題論理を通して，集合に対する定義を理解すること
- 命題論理を通して，集合に対する定理を証明すること
  - の第 1 ステップ (定義に基づいて証明すべき命題を得ること) を理解すること

前回の内容の復習が必要

目次

共通点は何？



目次

集合

集合 (常識に基づく定義)
集合とはものの集まり

集合の記法
波かっこ「{」と「}」を使って記述する

例：
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- { あ, い, う, え, お }

集合の要素とは？
集合を構成する 1 つ 1 つのものを要素または元と呼ぶ

格言
数学理解の基本は「定義」と「記法」の理解

要素であることの記法

記法
- x が集合 A の要素であることを次のように表記する

$$x \in A$$

- x が集合 A の要素ではないことを次のように表記する

$$x \notin A$$

例：$A =$ { あ, い, う, え, お } とすると
- あ $\in A$
- ま $\notin A$
- お $\in A$
- う $\in A$

集合の記述法 (1)：要素を並べる

U = { アメリカ, イギリス, イタリア, オーストリア, オーストラリア, オランダ, カナダ, 韓国, ギリシャ, スウェーデン, スイス, スペイン, ソ連, 中国, ドイツ, 西ドイツ, 日本, ノルウェー, フィンランド, フランス, ベルギー, メキシコ, ユーゴスラビア }

集合の「外延的定義」と呼ばれる

集合の記述法 (2)：性質を定める

$U = \{x \mid x$ は (2011 年までに) 近代オリンピックが開催された国 $\}$

記法

「$\{x \mid x$ がこの集合の要素であるための (必要十分) 条件 $\}$」

「$\mid$」の代わりに「:」や「;」を使うこともある

集合の「内包的定義」と呼ばれる

集合の記述法：他の例

$$\begin{aligned} A &= \{2,3,5,7\} \\ &= \{7,2,5,3\} \quad \text{←並べる順番が違っても集合としては同じ} \\ &= \{n \mid n \text{ は 10 以下の素数である}\} \\ &= \left\{ n \;\middle|\; \begin{array}{l} n \text{ は整数であり，かつ，} \\ n^4 - 17n^3 + 101n^2 - 247n + 210 = 0 \text{ を満たす} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

外延的定義の利点・欠点

利点
- 何が要素か分かりやすい

欠点
- 全要素を並べる必要がある
- 全要素を並べられないかも
- 集合の性質が分かりにくい

内包的定義の利点・欠点

利点
- 集合の性質が分かりやすい
- 全要素を並べなくてもよい

欠点
- 何が要素か分かりにくい
- よく書き間違える（要努力！）

集合の記述法：他の例 2

$$\begin{aligned} B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である}\} \\ &= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\ &= \{4, 9, 25, 49\} \\ C &= \{m - n \mid m \text{ と } n \text{ は 10 以下の素数である}\} \\ &= \{2-2, 2-3, 2-5, 2-7, 3-2, 3-3, 3-5, 3-7, \\ &\quad 5-2, 5-3, 5-5, 5-7, 7-2, 7-3, 7-5, 7-7\} \\ &= \{0, -1, -3, -5, 1, 0, -2, -4, 3, 2, 0, -2, 5, 4, 2, 0\} \\ &= \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

よく出てくる (無限) 集合

表記法
- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

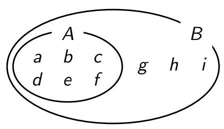
例：
- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- $1 + \sqrt{2}i \notin \mathbb{R}$
- $1 + \sqrt{2}i \in \mathbb{C}$

部分集合：直観

次の 2 つの集合を考える
- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

図に描いてみる
(「オイラー図」と呼ぶ)



部分集合とは？ (直観)

集合 A が集合 B の部分集合であるとは，A が B に含まれていること

「含まれている」とは？ 論理を使って書くことを考える

部分集合：定義

部分集合とは？ (論理を使った定義)

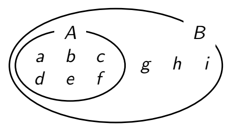
A が B の部分集合であるとは，どの x に対しても次が成り立つこと

$$x \in A \text{ ならば } x \in B$$

次の 2 つの集合を考える
- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

図に描いてみる



部分集合の表記法

A が B の部分集合であることを「$A \subseteq B$」と表記する

「$A \subset B$」や「$A \subsetneq B$」と表記することもある

例 1

$$\begin{aligned} U &= \{\text{アメリカ, イギリス, イタリア, オーストリア, オーストラリア,} \\ &\quad \text{オランダ, カナダ, 韓国, ギリシャ, スウェーデン, スイス,} \\ &\quad \text{スペイン, ソ連, 中国, ドイツ, 西ドイツ, 日本, ノルウェー,} \\ &\quad \text{フィンランド, フランス, ベルギー, メキシコ, ユーゴスラビア}\} \\ &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 近代オリンピックが開催された国}\} \\ W &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 冬季オリンピックが開催された国}\} \\ &= \{\text{アメリカ, イタリア, オーストリア, カナダ, スイス, ドイツ,} \\ &\quad \text{日本, ノルウェー, フランス, ユーゴスラビア}\} \end{aligned}$$

このとき，$W \subseteq U$ となる

例 2

表記法：復習
- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

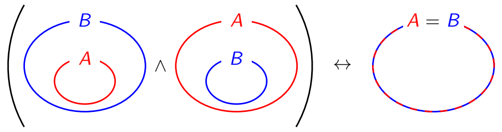
同じ集合

同じ集合

2 つの集合 A と B が同じであることを

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

が成り立つことと定義し,「$A = B$」と表記する



目次

共通部分

共通部分とは？

集合 A, B の**共通部分**を $A \cap B$ と表記し,

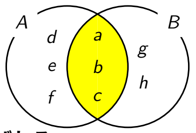
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき,
- $A \cap B = \{a, b, c\}$

オイラー図



「共通部分」は「積集合」,「交わり」とも呼ばれる

共通部分：例

$$\begin{aligned}
W &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 冬季オリンピックが開催された国}\}\\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, オーストリア, カナダ, スイス, ドイツ, 日本, ノルウェー, フランス, ユーゴスラビア}\}\\
S &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 夏季オリンピックが開催された国}\}\\
&= \{\text{アメリカ, イギリス, イタリア, オーストラリア, オランダ, カナダ, 韓国, ギリシャ, スウェーデン, スペイン, ソ連, 中国, ドイツ, 西ドイツ, 日本, フィンランド, フランス, ベルギー, メキシコ}\}\\
W \cap S &= \left\{x \;\middle|\; x \text{ は (2011 年までに) 夏季オリンピックと冬季オリンピックがともに開催された国}\right\}\\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, カナダ, ドイツ, 日本, フランス}\}
\end{aligned}$$

合併

合併とは？

集合 A, B の**合併**を $A \cup B$ と表記し,

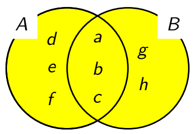
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき,
- $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

オイラー図



「合併」は「和集合」,「結び」とも呼ばれる

合併：例

$$\begin{aligned}
I &= \{x \mid x \text{ は 19 世紀に近代オリンピックが開催された国}\}\\
&= \{\text{ギリシャ, フランス}\}\\
J &= \{x \mid x \text{ は 21 世紀 (2011 年まで) に近代五輪が開催された国}\}\\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, カナダ, ギリシャ, 中国}\}\\
I \cup J &= \left\{x \;\middle|\; x \text{ は 19 世紀か 21 世紀 (2011 年まで) に近代オリンピックが開催された国}\right\}\\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, カナダ, ギリシャ, 中国, フランス}\}
\end{aligned}$$

差集合

差集合とは？

集合 A, B に対して, **差集合** $A - B$ を

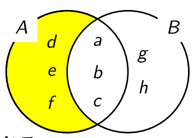
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき,
- $A - B = \{d, e, f\}$

オイラー図



「$A - B$」の代わりに「$A \setminus B$」と書くこともある

差集合：例

$$\begin{aligned}
T &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 近代五輪が 3 回以上行われた国}\}\\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, カナダ, スイス, 日本, フランス}\}\\
A &= \{x \mid x \text{ は (2011 までに) 近代五輪が行われたアジアの国}\}\\
&= \{\text{韓国, 中国, 日本}\}\\
T - A &= \left\{x \;\middle|\; x \text{ は (2011 までに) 近代五輪が 3 回以上行われたアジア以外の国}\right\}\\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, カナダ, スイス, フランス}\}
\end{aligned}$$

補集合

補集合とは？

集合 A, B が $A \subseteq B$ を満たし，それが明白であるとき
A の**補集合**を

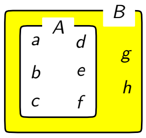
$$A^c = B - A$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ のとき，
- $A^c = \{g, h\}$

オイラー図



「A^c」の代わりに「$\overline{A}$」と書くこともある

空集合

空集合とは？

要素を持たない集合を**空集合**と呼び，「$\emptyset$」または「$\varnothing$」と表記する

注 1：空集合は「$\{\ \}$」とも書く

注 2：空集合の記号「$\emptyset$」と「$\varnothing$」はギリシャ文字「Φ」,「ϕ」と違う

空集合：例

$$\begin{aligned}
T &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 近代五輪が 3 回以上行われた国}\} \\
&= \{\text{アメリカ, イタリア, カナダ, 日本, フランス}\} \\
S &= \{x \mid x \text{ は (2011 年までに) 夏季オリンピックが開催された国}\} \\
&= \{\text{アメリカ, イギリス, イタリア, オーストラリア, オランダ,} \\
&\quad \text{カナダ, 韓国, ギリシャ, スウェーデン, スペイン, ソ連,} \\
&\quad \text{中国, ドイツ, 西ドイツ, 日本, フィンランド, フランス,} \\
&\quad \text{ベルギー, メキシコ}\} \\
T - S &= \left\{x \;\middle|\; \begin{array}{l} x \text{ は (2011 年までに) 近代五輪を 3 回以上} \\ \text{行ったが，夏季五輪を行っていない国} \end{array}\right\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

定義の補足

共通部分とは？ (再掲)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

これは次と同じ「意味」

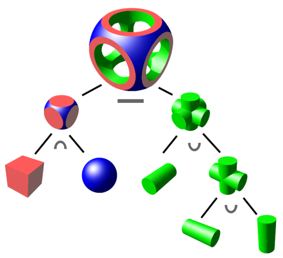
$x \in A \cap B$ であるとき，そのときに限り ($x \in A$ かつ $x \in B$)

同様な事項は，合併，差集合に対しても成り立つ

集合の演算の応用例：Constructive Solid Geometry

Constructive Solid Geometry

単純な物体に対して集合演算を適用することで，複雑な物体を表現する
コンピュータ・グラフィクスの技法



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Csg_tree.png

目次

とりあえず，証明を見てみる

証明してみること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

<u>証明</u>：

- $x \in A \cap B$ と仮定する．
- 共通部分の定義より，$x \in A$ かつ $x \in B$．
- よって，$x \in A$ が成り立つ．
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成り立つ． □

疑問？

これは何？

オイラー図の与える直観

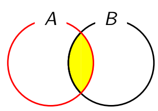
証明してみること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

オイラー図を描いてみる



これは直観を与えるだけで，証明は論理に基づいて行う

証明とは？

証明とは？（常識に基づく定義）

定義と前提に基づき，推論を重ねて，結論を導くこと

「結論を導く」とは？

「『前提』ならば『結論』」という命題が恒真命題であることを示すこと

証明してみること (1)

集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

これはどういう命題なのか？ 定義に戻って書き直す

- $\cap$ (共通部分) の定義に戻る
- $\subseteq$ (部分集合) の定義に戻る

証明の作り方：定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$A \cap B \subseteq A$$

それを $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$

それを $\cap$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ かつ $x \in B)$ ならば $x \in A$

証明の作り方：定義に基づいて書き直す (続)

書き直してできたもの (再掲)

$(x \in A$ かつ $x \in B)$ ならば $x \in A$

ここで，命題変数 (のようなもの) P と Q を次のように置く

- $P =$ 「$x \in A$」
- $Q =$ 「$x \in B$」

「書き直してできたもの」を P と Q によって書き直したもの

$$(P \wedge Q) \rightarrow P$$

この命題論理式が恒真命題であることを示せばよい

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

はじめの「そっけない証明」をもう一度見てみる

証明したいこと

$$A \cap B \subseteq A$$

証明：

- $x \in A \cap B$ と仮定する．
- 共通部分の定義より，$x \in A$ かつ $x \in B$．
- よって，$x \in A$ が成り立つ．
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ が成り立つ． □

ポイント

- 「定義に基づいて書き直す」ことを確かに行っている
  - しかし，どこで行っているのかは分かりにくい
- 恒真命題であることを示すために真理値表は書いていない
  - 実はこれが普通の方法 (次回の授業で)

今日の授業では「定義に基づいて書き直す」ことに主眼を置く

とりあえず，証明を見てみる：パート 2

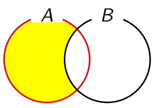
証明してみること (2)

集合 A, B に対して，

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

が成立する．

オイラー図から直観を得る



「証明してみること」を定義に基づいて書き直す

定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

それを $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$

定義に基づいて書き直す (続)

「$x \in (A \cup B) - B$」を $-$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$

それを $\cup$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ または $x \in B)$ かつ $x \notin B$

それを $\notin$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ または $x \in B)$ かつ $(x \in B$ ではない$)$

定義に基づいて書き直す (続 2)

証明したいことを $\subseteq$，$-$，$\cup$，$\notin$ の定義に基づいて書き直したもの

$((x \in A$ または $x \in B)$ かつ $(x \in B$ ではない$))$ ならば $x \in A$

ここで，命題変数 (のようなもの) P と Q を次のように置く

- $P =$ 「$x \in A$」
- $Q =$ 「$x \in B$」

「書き直したもの」を P と Q によって書き直したもの

$$((P \vee Q) \wedge \neg Q) \rightarrow P$$

この命題論理式が恒真命題であることを示せばよい

P	Q	$\neg Q$	$P \vee Q$	$((P \vee Q) \wedge \neg Q)$	$((P \vee Q) \wedge \neg Q) \rightarrow P$
T	T	F	T	F	T
T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	T

とりあえず，証明を見てみる：パート 3

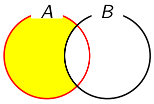
証明してみること (3)

集合 A, B に対して，

$$A - (A \cap B) = A - B$$

が成立する．

オイラー図から直観を得る



「証明してみること」を定義に基づいて書き直す

定義に基づいて書き直す

証明したいこと

$$A - (A \cap B) = A - B$$

それを $=$ の定義に基づいて書き直したもの

$A - (A \cap B) \subseteq A - B$ かつ $A - B \subseteq A - (A \cap B)$

定義に基づいて書き直す (2)

「$A - (A \cap B) \subseteq A - B$」を $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in A - (A \cap B)$ ならば $x \in A - B$

それを $-$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ かつ $x \notin A \cap B)$ ならば $(x \in A$ かつ $x \notin B)$

それを $\notin$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ かつ $(x \in A \cap B$ ではない$))$ ならば $(x \in A$ かつ $(x \in B$ ではない$))$

それを $\cap$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ かつ $((x \in A$ かつ $x \in B)$ ではない$))$ ならば $(x \in A$ かつ $(x \in B$ ではない$))$

定義に基づいて書き直す (3)

「$A - B \subseteq A - (A \cap B)$」を $\subseteq$ の定義に基づいて書き直したもの

$x \in A - B$ ならば $x \in A - (A \cap B)$

それを $-$，$\notin$，$\cap$ の定義に基づいて書き直したもの

$(x \in A$ かつ $(x \in B$ ではない$))$ ならば $(x \in A$ かつ $((x \in A$ かつ $x \in B)$ ではない$))$

定義に基づいて書き直す (4)

証明したいことを $=$，$\subseteq$，$-$，$\notin$，$\cap$ の定義に基づいて書き直したもの

$((x \in A$ かつ $((x \in A$ かつ $x \in B)$ ではない$))$ ならば $(x \in A$ かつ $(x \in B$ ではない$)))$
かつ $((x \in A$ かつ $(x \in B$ ではない$))$ ならば $(x \in A$ かつ $((x \in A$ かつ $x \in B)$ ではない$)))$

ここで，命題変数 (のようなもの) P と Q を次のように置く

- $P =$ 「$x \in A$」
- $Q =$ 「$x \in B$」

「書き直したもの」を P と Q によって書き直したもの

$$((P \land \neg(P \land Q)) \to (P \land \neg Q)) \land ((P \land \neg Q) \to (P \land \neg(P \land Q)))$$

この命題論理式が恒真命題であることを示せばよい

P	Q	$\neg Q$	$P \land Q$	$P \land \neg Q$	$\neg(P \land Q)$	$P \land \neg(P \land Q)$	$(P \land \neg(P \land Q)) \to (P \land \neg Q)$	$(P \land \neg Q) \to (P \land \neg(P \land Q))$	$((P \land \neg(P \land Q)) \to (P \land \neg Q)) \land ((P \land \neg Q) \to (P \land \neg(P \land Q)))$
T	T	F	T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	T	T	T

目次

今日のまとめ

集合と集合の演算

- 集合の記述法 (要素を並べる，性質を定める)
- 部分集合の定義
- 共通部分，合併，差集合，補集合，空集合

集合に関する証明

- 「定義に基づいて書き直す」ことが今日の焦点
- 「推論を重ねる」ことは次回以降に説明

格言

「定義に基づいて書き直す」ことが証明の第一歩

集合の定義：補足

集合 (常識に基づく定義) 再掲

集合とはものの集まり

これを集合の定義だとすると，様々な「まずいこと」が起きると
知られている

興味のある人は次のことばを調べてみる

- ラッセルのパラドックス　(「まずいこと」の例)
- 公理的集合論　(「まずいこと」の解決法)

この授業では，集合自身についてあまり深く考えないことにする