離散数学 第 1 回
論理 (1)：命題論理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 4 月 10 日

最終更新：2012 年 4 月 11 日　10:57

概要

目標

離散数学を通して
- 数学における正しい用語法を身につけること
- 論理的な思考力を身につけること

なぜ？

- 数学は理工学の「言語」 $\rightsquigarrow$
  正しい用語法の使用により，意志疎通が可能となる
- 思考は人間生活の「基礎」 $\rightsquigarrow$
  論理的思考の活用により，豊かな生活が可能となる

スケジュール 前半 (予定)

1. 論理 (1) 命題論理　(4 月 10 日)
- ⋆ 休講 (健康診断)　(4 月 17 日)
2. 集合 (1) 集合とは何か　(4 月 24 日)
3. 論理 (2) 述語論理　(5 月 1 日)
4. 集合 (2) 集合演算など　(5 月 8 日)
5. 集合 (3) 論理を用いた証明　(5 月 15 日)
6. 関数 (1) 関数，像と逆像　(5 月 22 日)
7. 関数 (2) 全射と単射　(5 月 29 日)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講　(6 月 5 日)
8. 順序と同値関係 (1) 関係　(6 月 12 日)
9. 順序と同値関係 (2) 順序関係　(6 月 19 日)
- ⋆ 休講　(6 月 26 日)
10. 順序と同値関係 (3) 同値関係　(7 月 3 日)
11. 数学的帰納法　(7 月 10 日)
12. 数学的帰納法と関係の閉包　(7 月 17 日)
13. グラフと木 (1) グラフ　(7 月 24 日)
14. グラフと木 (2) 木　(7 月 31 日？)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員
- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：設定中

ティーチング・アシスタント (TA)
- 小泉 雄貴 (こいずみ ゆうき)
- 居室：西 4 号館 5 階 502 (村松研究室)
- E-mail：koizumi0836@gmail.com

講義資料
- Web：http://sites.google.com/site/yoshiookamotoy/discretemath
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義前日の昼 12 時までに，ここに置かれる

講義資料

http://sites.google.com/site/yoshiookamotoy/discretemath
- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語集：よみがな，英訳付き

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

http://video.fp.uec.ac.jp/
- ビデオ

講義終了後，約 1 時間後に視聴可能

授業の進め方

講義 (60 分)
- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (30 分)
- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員とティーチング・アシスタントに質問する

退室 (0 分)
- 授業の感想などを小さな紙に書いて提出 (匿名可)

オフィスアワー：授業終了後
- 質問など

演習問題

演習問題の進め方
- 授業の後半 30 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類
- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加

評価

期末試験による

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 4 題は演習問題として提示されたものと同一である
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

格言

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。
「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが，
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- 離散数学の入門書で，
  集合，関数 (写像)，関係，数学的帰納法，グラフを扱ったもの
  - 石村園子,『やさしく学べる離散数学』，共立出版，2007 年
  - Seymour Lipschutz,『離散数学』，オーム社，1995 年
  - 中内伸光,『ろんりと集合』，日本評論社，2009 年
    (ただし，グラフは扱っていない)
  - など
- 証明の書き方の入門書
  - 松井知己,『だれでも証明が書ける』，日本評論社，2010 年
- その他の参考書
  - 授業の中で紹介

この講義の約束

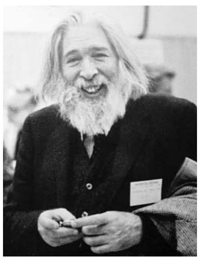
- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- 携帯電話は使わない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

目次

『パズルランドのアリス』から

レイモンド・スマリヤン (著)，市場泰男 (訳)，
『パズルランドのアリス』，ハヤカワ文庫，2004 年



http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Smullyan.html

『パズルランドのアリス』の第 55 問

『パズルランドのアリス』第 2 巻，18–19 ページより

- 「こんどは論理の問題じゃ」と白の女王さまがいいました。
- 「赤の王さまが眠っていらっしゃるときは、
  王さまが信じなさることはすべてまちがっている。
- つまり本当のことでないのじゃ。
- けれども、王さまが目を覚ましていらっしゃるときは、
  信じなさることはすべて本当なのじゃ。
- さて、昨日の晩のぴったり十時に、赤の王さまは、
  いまご自分も、また赤の女王さまも、眠っていると信じなさった。
- ではそのとき、赤の女王さまは、眠っていらっしゃったか、それとも
  目をさましていらっしゃったか、どうじゃ？」

あとで，このパズルを解く

目次

命題と真偽

命題とは？（常識に基づいた定義）

真偽を定められる文，あるいは，その内容

例：トランプでゲームをしているような状況で

- 「一郎はハートの 4 を持っている」
- 「二郎はクラブの Q を持っている」

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である
- 2012 年 4 月 10 日は月曜日である
- 2012 年は寅年ですか？
- 2012 年は寅年です
- やったー！
- ロンドンオリンピックでは金メダルを取ります
- 調布市は広い

真偽の表現いろいろ

真理値とは？

「真」か「偽」という値

真	偽
true	false
T	F
1	0

以降,「真と偽」か「T と F」を用いていく

目次

記号論理

命題変数（常識に基づいた定義）

命題を記号で表したもの

例：トランプでゲームをしているような状況で

- P =「一郎はハートの 4 を持っている」
- Q =「二郎はクラブの Q を持っている」

命題から別の命題を得ること

例

- 2 つの命題
  - P =「一郎はハートの 4 を持っている」
  - Q =「二郎はクラブの Q を持っている」

  の真偽から，次の命題
  - 「一郎はハートの 4 を持っていない」
  - 「一郎と二郎のどちらかはクラブの Q を持っている」

  の真偽は決定される
- つまり，
  命題から別の命題が得られ，その真偽が決まることがある

今からやること

そのような「別の命題の得られ方」と「その真偽の決まり方」を見る

否定

否定（常識に基づいた定義）

命題 P の否定とは，P の真偽を反転させた命題
「$\neg P$」と表記する

「$\neg P$」を「$\sim P$」,「$\overline{P}$」とも表記する

P	$\neg P$
T	F
F	T

例

- P =「一郎はハートの 4 を持っている」のとき
- $\neg P$ = 「一郎はハートの 4 を持っていない」

連言

連言（常識に基づいた定義）

命題 P と Q の連言とは，P と Q がともに真であるとき，そのときのみ真である命題.「$P \wedge Q$」と表記する

「連言」を「論理積」,「AND」ともいう

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例

- P =「一郎はハートの 4 を持っている」
- Q =「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \wedge Q$ = 「一郎はハートの 4 を持っていて，かつ，二郎はクラブの Q を持っている」

選言

選言 (常識に基づいた定義)

命題 P と Q の**選言**とは，P か Q が真であるとき，そのときのみ真である命題.「$P \vee Q$」と表記する

「選言」を「論理和」,「OR」ともいう

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \vee Q =$ 「一郎がハートの 4 を持っているか，**または**，二郎がクラブの Q を持っている」

含意

含意 (常識に基づいた定義)

命題 P から Q への**含意**とは，P が真，Q が偽であるとき，そのときのみ偽である命題.「$P \to Q$」と表記する

「$P \to Q$」を「$P \supset Q$」とも書く

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \to Q =$ 「一郎がハートの 4 を持っている**ならば**，二郎はクラブの Q を持っている」

同値

同値 (常識に基づいた定義)

命題 P と Q の**同値**とは，P と Q の真理値が等しいとき，そのときのみ真である命題.「$P \leftrightarrow Q$」と表記する

「$P \leftrightarrow Q$」を「$P \equiv Q$」とも書く

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例

- $P =$「一郎はハートの 4 を持っている」
- $Q =$「二郎はクラブの Q を持っている」のとき
- $P \leftrightarrow Q =$ 「一郎がハートの 4 を持っている**とき**，**そのときに限り**，二郎はクラブの Q を持っている」

日本語との対応：例

否定：$\neg P$

- P ではない

連言：$P \wedge Q$

- P かつ Q
- P であり，同時に，Q でもある

選言：$P \vee Q$

- P または Q
- P あるいは Q
- P であるか，そうでなければ，Q である

含意：$P \to Q$

- P ならば Q
- P であるとき，Q でなければならない

同値：$P \leftrightarrow Q$

- P であるとき，そのときに限り Q である
- P と Q は同値である

命題論理式

演算がいろいろあるので...

演算を組み合わせて，複雑な命題を表現できる

例：$(P \to \neg Q) \wedge \neg(\neg P \leftrightarrow (R \vee Q))$

命題論理式 (常識に基づく定義)

命題論理式とは，命題を表す変数 (命題変数) と命題の演算 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$ を意味を成すように組み合わせたもの
(命題論理式も命題を表す)

命題論理式でないものの例：$P \vee \wedge \vee Q$，$P \to (Q + R)$

命題論理式の真偽はどのように決まるのか？

命題変数 P と Q を使った命題論理式「$(P \to Q) \to \neg Q$」を考える

- この式の真偽は P と Q の真偽から決まるけど，どのように？
- これは「$P \to Q$」から「$\neg Q$」への含意
  $\therefore$ 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽が分かれば「$(P \to Q) \to \neg Q$」の真偽も分かる
- 「$P \to Q$」と「$\neg Q$」の真偽は分かる

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$(P \to Q) \to \neg Q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

↑これを「**真理値表**」と呼ぶ

真理値表による分析：例 1

命題変数 P, Q に対して,「$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	F	T

真理値表による分析：例 2

命題変数 P, Q, R に対して,「$(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$」を考える

- この命題論理式の真理値表は以下の通り

P	Q	R	$P \leftrightarrow Q$	$R \leftrightarrow Q$	$P \to R$	$(P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q)$	$(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

真理値表による分析：書くときの注意

- 場合に漏れがないように
- 1 つの演算について 1 つの列を作るように
- 規則を当てはめた結果が右側に来るように
- 一方，罫線は引いても引かなくてもよい (もっと引いてもよい)

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \wedge (Q \vee \neg P)$	$\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	F	T

目次

『パズルランドのアリス』の第 55 問 (再掲)

『パズルランドのアリス』第 2 巻，18–19 ページより

- 「こんどは論理の問題じゃ」と白の女王さまがいいました。
- 「赤の王さまが眠っていらっしゃるときは、王さまが信じなさることはすべてまちがっている。
- つまり本当のことでないのじゃ。
- けれども、王さまが目を覚ましていらっしゃるときは、信じなさることはすべて本当なのじゃ。
- さて、昨日の晩のぴったり十時に、赤の王さまは、いまご自分も、また赤の女王さまも、眠っていると信じなさった。
- ではそのとき、赤の女王さまは、眠っていらっしゃったか、それとも目をさましていらっしゃったか、どうじゃ？」

論理によるモデル化

命題記号を導入
- P = 赤の王さまが眠っている
- Q = 赤の女王さまが眠っている

各命題を命題論理式として記述
- 王さまが信じていることは「$P \wedge Q$」
- 王さまのキャラクターから「$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$」
- 知りたいことは「Q」

つまり，
- 「$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$」を真とする「$Q$」は何？

真理値表

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

つまり，
- 「$P \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$」が真となるのは，「$Q$」が偽のときのみ
- よって，赤の女王さまは眠っていない

目次

恒真命題

恒真命題 (トートロジー) とは？

命題変数にどのような真理値が割り当てられても，常に真となる命題論理式

例：「$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$」は恒真命題

P	Q	$Q \rightarrow P$	$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

重要な恒真命題：含意の除去

含意の除去

命題変数 P, Q に対して，次の命題論理式は恒真命題

$$(P \rightarrow Q) \quad \leftrightarrow \quad (\neg P \vee Q)$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

□

証明終了のしるし↑

重要な恒真命題：同値の除去

同値の除去

命題変数 P, Q に対して，次の命題論理式は恒真命題

$$(P \leftrightarrow Q) \quad \leftrightarrow \quad ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

□

重要な恒真命題：排中法則

排中法則

命題変数 P に対して，次の命題論理式は恒真命題

$$P \vee \neg P$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
T	F	T
F	T	T

□

重要な恒真命題：ド・モルガンの法則

ド・モルガンの法則

命題変数 P, Q に対して，次の 2 つの命題論理式は恒真命題

$$(\neg(P \vee Q)) \quad \leftrightarrow \quad (\neg P \wedge \neg Q)$$
$$(\neg(P \wedge Q)) \quad \leftrightarrow \quad (\neg P \vee \neg Q)$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg(P \vee Q)) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T	T

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg(P \wedge Q)) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T

□

重要な恒真命題：モードゥス・ポネンス

モードゥス・ポネンス

命題変数 P, Q に対して，次の命題論理式は恒真命題

$$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$P \to Q$	$P \wedge (P \to Q)$	$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

□

重要な恒真命題：対偶法則

対偶法則

命題変数 P, Q に対して，次の命題論理式は恒真命題

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

□

恒真命題いろいろ (1)

冪等法則

$$(P \wedge P) \leftrightarrow P$$
$$(P \vee P) \leftrightarrow P$$

吸収法則

$$((P \wedge Q) \vee P) \leftrightarrow P$$
$$((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow P$$

交換法則

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$$
$$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$$

二重否定の除去

$$P \leftrightarrow \neg(\neg P)$$

結合法則

$$((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$$
$$((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$$

恒真命題いろいろ (2)

分配法則

$$((P \vee Q) \wedge R) \leftrightarrow ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$$
$$((P \wedge Q) \vee R) \leftrightarrow ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$$

定数の除去

$$(P \wedge \mathrm{T}) \leftrightarrow P$$
$$(P \vee \mathrm{F}) \leftrightarrow P$$

変数の除去

$$(P \wedge \mathrm{F}) \leftrightarrow \mathrm{F}$$
$$(P \vee \mathrm{T}) \leftrightarrow \mathrm{T}$$

含意の合成

$$((P \to Q) \wedge (P \to R)) \to (P \to (Q \wedge R))$$

三段論法

$$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$$

恒真命題の利用法

- 恒真命題を使って，命題論理式を簡略化できる
  (見た目を単純にできる)
- 恒真命題を使って，数学的な証明ができる

これらのついては後の講義で扱う...

目次

今日のまとめ

命題とその真偽
- 命題:「真」か「偽」が定まる文

命題論理式と真理値表
- 命題論理式:命題を組み合わせて得られた命題
- 真理値表:命題論理式の真偽を分析する道具

恒真命題
- 恒真命題:命題変数の真偽が何であっても常に真となる命題論理式
- 恒真命題であることの証明:真理値表を書き下す
- 恒真命題の利用法:次回以降

格言
論理は思考をまとめる道具

補足

この講義で扱うのは「論理学」ではない!
- 後の授業で必要なことだけを扱った (「論理学を使う」という立場)
- そのため,常識に基づいて論理学のさわりを見た
- ちゃんとした「論理学」については別の機会に勉強を

「論理学」自体に興味がある場合は,以下の本を推薦
- レイモンド・スマリヤン (著),田中 朋之,長尾 確 (訳),『スマリヤンの決定不能の論理パズル』,白揚社,2008 年.
- 戸田山 和久,『論理学をつくる』,名古屋大学出版会,2000 年.

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時,小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK