

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 12.1 任意の正の整数  $n$  に対して

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 12.2 任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 12.3 3以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n \leq 3^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 12.4 任意の正の整数  $n$  に対して， $a_n$  を

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．このとき，

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ．

復習問題 12.5 任意の正の整数  $n$  に対して，第  $n$  番  
フィボナッチ数  $F_n$  を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．任意の正整数  $n$  に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 12.6 任意の正の整数  $n$  に対して第  $n$  番  
フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 12.7 集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  に対して，関数  
 $f: A \rightarrow A$  を  $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 1$   
で定義する．

1.  $f^2(1), f^2(2), f^2(3), f^2(4)$  を定めよ．

2.  $f^3(1), f^3(2), f^3(3), f^3(4)$  を定めよ．

復習問題 12.8 関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する．このとき，任意の正の整数  $n$  に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 12.9 任意の正の整数  $n$  に対して

$$11^n - 4^n \text{ が } 7 \text{ で割り切れる}$$

ことを数学的帰納法により証明せよ．

追加問題 12.10 3以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$3n^2 \leq 3^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．(ヒント：  
問題 12.3 の結果を用いてもよい．)

追加問題 12.11 第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とす  
るとき，任意の正の整数  $n$  に対して，

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \text{ および } F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2$$

が成り立つことを証明せよ．