

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 10.1 集合 A の分割 P を考える．このとき，集合 A 上の関係 R を次のように定義する．すなわち， $x R y$ であることをある $X \in P$ が存在して， $x \in X$ かつ $y \in X$ であることとする．このとき， R が A 上の同値関係となることを証明せよ．

復習問題 10.2 集合 A 上の同値関係 R に対して

$$P = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

という集合を考える．ただし， $[a]_R$ は R による a の同値類を表す．このとき， P が A の分割であることを証明せよ．

補足問題 10.3 集合 A 上の同値関係 R と，任意の要素 $a, a' \in A$ を考える．このとき， $a R a'$ ならば， $[a]_R = [a']_R$ となることを証明せよ．

追加問題 10.4 0 以上の整数全体の集合 \mathbb{N} 上の同値関係 \equiv_2 を考える (\equiv_2 の定義は復習問題 9.6 を参照のこと)．このとき，商集合 \mathbb{N} / \equiv_2 はどうなるか？

追加問題 10.5 集合 A 上の同値関係 R に対して，関数 $f: A \rightarrow A / R$ を次のように定義する．すなわち，任意の $a \in A$ に対して， $f(a) = [a]_R$ とする．このとき， f が全射となることを証明せよ．

追加問題 10.6 集合 A 上の関係 R_1 ，集合 B 上の関係 R_2 に対して，直積 $A \times B$ 上の関係 R を次のように定義する．すなわち，任意の $(a, b), (a', b') \in A \times B$ に対して， $(a, b) R (a', b')$ であることを， $a R_1 a'$ かつ $b R_2 b'$ であることとする．

1. 関係 R_1, R_2 がともに同値関係であるとき， R も同値関係であることを証明せよ．
2. 商集合に関して

$$(A \times B) / R = (A / R_1) \times (B / R_2)$$

が成り立つことを証明せよ．