**離散数学 (8)** **2012 年 6 月 12 日**
**演習問題** **岡本 吉央**

**注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．**

**復習問題 8.1** 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3\}$ に対して，次で定義される各関数が全射であるか，単射であるか，全単射であるか，答えよ．

1. $f_1 \colon A \to B$ で，$f_1(1) = 1$，$f_1(2) = 3$，$f_1(3) = 1$，$f_1(4) = 3$.
2. $f_2 \colon A \to B$ で，$f_2(1) = 3$，$f_2(2) = 1$，$f_2(3) = 3$，$f_2(4) = 2$.
3. $f_3 \colon B \to A$ で，$f_3(1) = 2$，$f_3(2) = 4$，$f_3(3) = 2$.
4. $f_4 \colon B \to A$ で，$f_4(1) = 2$，$f_4(2) = 1$，$f_4(3) = 3$.
5. $f_5 \colon B \to B$ で，$f_5(1) = 2$，$f_5(2) = 2$，$f_5(3) = 1$.
6. $f_6 \colon B \to B$ で，$f_6(1) = 3$，$f_6(2) = 1$，$f_6(3) = 2$.

**復習問題 8.2** 関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

であるとして定義する．

1. 関数 $f$ が全射であることを証明せよ．
2. 関数 $f$ が単射であることを証明せよ．
3. 関数 $f$ の逆関数 $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が何であるか，答えよ．

**復習問題 8.3** 関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

であるとして定義する．

1. 関数 $f$ が全射ではないことを証明せよ．
2. 関数 $f$ が単射ではないことを証明せよ．

---

**補足問題 8.4** 実数の集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}$ に対して，関数 $f \colon A \to B$ を

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

であるとして定義する．以下のように $A$ と $B$ を定めるとき，関数 $f$ が全射であるか，単射であるか，全単射であるか，答えよ．

1. $A = \mathbb{R}$，$B = [0, \infty)$.
2. $A = [0, \infty)$，$B = [0, \infty)$.
3. $A = [0, 1]$，$B = [0, \infty)$.

**補足問題 8.5** 任意の集合 $A, B$ と任意の関数 $f \colon A \to B$ を考える．関数 $f$ が全単射であるとき，その逆関数 $f^{-1}$ も全単射であることを証明せよ．

---

**追加問題 8.6** 次のそれぞれの関数が全射であるか，単射であるか，全単射であるか，答えよ．そして，全単射である場合は，その逆関数が何であるか，答えよ．

1. $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$で，任意の$a \in \mathbb{R}$に対して，$f_1(a) = a^3$.
2. $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$で，任意の$a \in \mathbb{R}$に対して，$f_2(a) = 2^a$.
3. $f_3 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$で，任意の$a \in \mathbb{N}$に対して，$f_3(a) = 2a + 1$.
4. $f_4 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$で，任意の$a \in \mathbb{Z}$に対して，$f_4(a) = |a|$.
5. $f_5 \colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ で，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$f_5(a) = \sin a$.

**追加問題 8.7** 任意の集合 $A, B$，任意の単射 $f \colon A \to B$ を考える．任意の $X \subseteq A$ に対して $f^{-1}(f(X)) = X$ となることを証明せよ．

**追加問題 8.8** 任意の集合 $A, B, C$，任意の関数 $f \colon A \to B, g \colon B \to C$ を考える．関数 $f, g$ がともに単射ならば，$g \circ f \colon A \to C$ も単射であることを証明せよ．

**追加問題 8.9** 任意の集合 $A, B, C$，任意の関数 $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ を考える．関数 $f, g$ がともに全射ならば，$g \circ f\colon A \to C$ も全射であることを証明せよ．

**追加問題 8.10** 任意の集合 $A, B, C$，任意の関数 $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ を考える．関数 $g \circ f\colon A \to C$ が単射ならば，$f$ も単射であることを証明せよ．

**追加問題 8.11** 任意の集合 $A, B, C$，任意の関数 $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ を考える．関数 $g \circ f\colon A \to C$ が全射ならば，$g$ も全射であることを証明せよ．

**追加問題 8.12** 任意の集合 $A, B$，任意の全単射 $f\colon A \to B$ を考える．このとき，$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ となることを証明せよ．同じく，$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ となることを証明せよ．