離散数学 (7) **2012 年 5 月 29 日**
演習問題 **岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 7.1 集合 $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{6,7,8\}$ に対して，関数 $f\colon A \to B$ を $f(1) = 6, f(2) = 6, f(3) = 7, f(4) = 7, f(5) = 8$ で定義する．このとき，次の集合は何になるか？ その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1. $f(\{1,2\})$.
2. $f(\{1,2,3\})$.
3. $f(\{1,2,3,4\})$.
4. $f(\{1,2,3,4,5\})$.
5. $f(\{2\})$.
6. $f^{-1}(\{6\})$.
7. $f^{-1}(\{6,7\})$.
8. $f^{-1}(\{6,7,8\})$.
9. $f^{-1}(\{7,8\})$.
10. $f^{-1}(\{6,8\})$.

復習問題 7.2 集合 $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6,7\}, C = \{8,9\}$ に対して，関数 $f\colon A \to B$ を $f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 7$ で，関数 $g\colon B \to C$ を $g(4) = 8, g(5) = 9, g(6) = 9, g(7) = 8$ で定義する．このとき，$g \circ f\colon A \to C$ はどのような関数であるか？ すべての $a \in A$ に対して $(g \circ f)(a)$ が何であるか定めよ．

復習問題 7.3 任意の集合 A, B，任意の関数 $f\colon A \to B$，任意の集合 $X, X' \subseteq A$ に対して，

$$X \subseteq X' \text{ ならば } f(X) \subseteq f(X')$$

となることを証明せよ．

追加問題 7.4 集合 A, B, C を $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6,7\}, C = \{8,9,10\}$ と定義する．関数 $f\colon A \to B$ を $f(1) = 5, f(2) = 5, f(3) = 6$ で定義する．関数 $g\colon B \to C$ を $g(4) = 8, g(5) = 8, g(6) = 9, g(7) = 10$ で定義する．このとき，次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1. $f(\{1,2,3\})$.
2. $f(\{1,2\})$.
3. $g(\{4,5,6\})$.
4. $g(\{5,6,7\})$.
5. $f^{-1}(\{4,5\})$.
6. $f^{-1}(\{4,5,6,7\})$.
7. $g^{-1}(\{8,9\})$.
8. $g^{-1}(\{8,9,10\})$.
9. $f^{-1}(f(\{1,3\}))$.
10. $f^{-1}(g^{-1}(\{8,9\}))$.
11. $(g \circ f)(\{1,2\})$.
12. $(g \circ f)^{-1}(\{8,9\})$.

追加問題 7.5 任意の集合 A, B，任意の関数 $f\colon A \to B$，任意の部分集合 $X, X' \subseteq A$ に対して

$$f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 7.6 任意の集合 A, B，任意の関数 $f\colon A \to B$，任意の部分集合 $Y, Y' \subseteq B$ に対して

$$Y \subseteq Y'$$

ならば

$$f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')$$

となることをが成り立つことを証明せよ．

追加問題 7.7 任意の集合 A, B，任意の関数 $f\colon A \to B$，任意の部分集合 $X \subseteq A$ に対して

$$X \subseteq f^{-1}(f(X))$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 7.8 任意の集合 A, B, C，任意の関数 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$，任意の集合 $Z \subseteq C$ に対して，

$$(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$$

が成り立つことを証明せよ．