離散数学 (3) **2012年5月1日**

演習問題 **岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 3.1 集合 A を $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ と定める．このとき，以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall\, n \in A$ (n は自然数である).
2. $\forall\, n \in A$ (n は偶数である).
3. $\exists\, n \in A$ (n は偶数である).
4. $\exists\, n \in A$ (n は自然数である).
5. $\exists\, n \in A$ (n は素数である).
6. $\exists\, n \in A$ (n は負の数である).

復習問題 3.2 集合 A を $A = \{1, 2\}$ と定める．このとき，以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall\, m \in A$ ($\forall\, n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
2. $\exists\, m \in A$ ($\forall\, n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
3. $\forall\, m \in A$ ($\exists\, n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
4. $\exists\, m \in A$ ($\exists\, n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).

復習問題 3.3 命題変数 P，Q，R を考える．同値変形によって，次の論理式の恒真性を証明せよ．

1. $(P \land (Q \land R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \land (P \land R))$.
2. $((P \land Q) \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.

復習問題 3.4 議論領域 D，命題関数 $P(x)$，$Q(x)$ に対して，次の論理式を考える．このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真命題となることを証明せよ．

1. $\neg(\forall\, x \in D\ (P(x))) \leftrightarrow \exists\, x \in D\ (\neg P(x))$.
2. $\neg(\exists\, x \in D\ (P(x))) \leftrightarrow \forall\, x \in D\ (\neg P(x))$.

復習問題 3.5 命題関数 $P(x)$，$Q(x)$ に対して，述語論理式

$$\neg(\forall\, x\ (P(x) \rightarrow Q(x))) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \land \neg Q(x))$$

を考える．同値変形によって，この論理式の恒真性を証明せよ．

復習問題 3.6 命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して，述語論理式

$$(\forall\, x\ (P(x)) \rightarrow Q) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \rightarrow Q)$$

を考える．同値変形によって，この論理式の恒真性を証明せよ．

補足問題 3.7 議論領域 D と命題関数 $P(x)$，$Q(x)$ に対して，次の論理式を考える．このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真命題となることを証明せよ．

1. $(\forall\, x \in D\ (P(x)) \land \forall\, x \in D\ (Q(x)))$
   $\leftrightarrow \forall\, x \in D\ (P(x) \land Q(x))$.
2. $(\exists\, x \in D\ (P(x)) \lor \exists\, x \in D\ (Q(x)))$
   $\leftrightarrow \exists\, x \in D\ (P(x) \lor Q(x))$.

補足問題 3.8 議論領域 D と命題関数 $P(x, y)$ に対して，次の論理式を考える．このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真命題となることを証明せよ．

1. $\forall\, x \in D\ (\forall\, y \in D\ (P(x, y)))$
   $\leftrightarrow \forall\, y \in D\ (\forall\, x \in D\ (P(x, y)))$.
2. $\exists\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y)))$
   $\leftrightarrow \exists\, y \in D\ (\exists\, x \in D\ (P(x, y)))$.

補足問題 3.9 議論領域 D と命題 P に対して，次の論理式を考える．ただし，P の中に x は自由変数として現れないものとする．このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真命題となることを証明せよ．

1. $P \leftrightarrow \forall\, x \in D\ (P)$.
2. $P \leftrightarrow \exists\, x \in D\ (P)$.

追加問題 3.10 集合 A を $A = \{1, 2\}$ と定める．このとき，以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall\, m \in A$ ($\forall\, n \in A$ ($m < n$ である)).
2. $\exists\, m \in A$ ($\forall\, n \in A$ ($m < n$ である)).

3. $\forall\, m \in A\ (\exists\, n \in A\ (m < n$ である$))$.
4. $\exists\, m \in A\ (\exists\, n \in A\ (m < n$ である$))$.
5. $\forall\, n \in A\ (\forall\, m \in A\ (m < n$ である$))$.
6. $\exists\, n \in A\ (\forall\, m \in A\ (m < n$ である$))$.
7. $\forall\, n \in A\ (\exists\, m \in A\ (m < n$ である$))$.
8. $\exists\, n \in A\ (\exists\, m \in A\ (m < n$ である$))$.

追加問題 3.11 命題関数 $P(x)$，$Q(x)$ に対して，次の述語論理式がそれぞれ恒真であることを同値変形によって証明せよ．

1. $(\forall\, x\ (P(x)) \to \exists\, x\ (P(x))) \leftrightarrow \mathsf{T}$.
2. $\exists\, x\, (P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall\, x\, (P(x)) \to \exists\, x\, (Q(x)))$.
3. $((\forall\, x\, (P(x)) \wedge \forall\, x\, (P(x) \to Q(x))) \to \forall\, x\, (Q(x)))$
$\leftrightarrow \mathsf{T}$.