

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 1.1 命題変数 P, Q, R を使った次の命題論理式の真理値表を書け．

1. $(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q$.
2. $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$.
3. $(P \rightarrow R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$.

復習問題 1.2 命題変数 P, Q を使った次の命題論理式が恒真命題であることを証明せよ．

1. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$.
2. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$.
3. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$.
4. $P \vee \neg P$.
5. $(\neg(P \vee Q)) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$.
6. $(\neg(P \wedge Q)) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$.
7. $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$.
8. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$.

復習問題 1.3 次のパズルはスマリヤン [2, 18–19 ページ] による．

「こんどは論理の問題じゃ」と白の女王さまがいました！赤の王さまが眠っていらっしゃるときは，王さまが信じなされることはすべてまちがっている．つまり本当のことでないのじゃ．けれども，王さまが目を覚ましていらっしゃるときは，信じなされることはすべて本当なのじゃ．さて，昨日の晩のぴったり十時に，赤の王さまは，いまご自分も，また赤の女王さまも，眠っていると信じなされた．ではそのとき，赤の女王さまは，眠っていらっしゃったか，それとも目をさましていらっしゃったか，どうじゃ？」

この問題の主旨は，上のパズルを記号論理の手法で解くことである．命題 P が「赤の王さまは眠っている」こと，命題 Q が「赤の女王さまは眠っている」ことを表すものとする．

1. 赤の王さまが信じていること，つまり，「いまご自分も，また赤の女王さまも，眠っている」ということを， P と Q を使った命題論理式で表せ．
2. 赤の王さまの性格と前問の解答となる命題論理式を踏まえて，「赤の王さまが眠っているとき，そのときに限り，『いまご自分も，また赤の女王さまも，眠っている』は正しくない」ということを， P と Q を使った命題論理式で表せ．
3. 前問の解答を踏まえて，パズルを解け．すなわち，赤の女王さまは眠っていたのか，どうか，決定せよ．

補足問題 1.4 命題変数 P, Q, R を使った次の命題論理式が恒真命題であることを証明せよ．

1. $(P \wedge P) \leftrightarrow P$.
2. $(P \vee P) \leftrightarrow P$.
3. $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$.
4. $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$.
5. $((P \wedge Q) \vee P) \leftrightarrow P$.
6. $((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow P$.
7. $P \leftrightarrow \neg(\neg P)$.
8. $((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$.
9. $((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$.
10. $((P \vee Q) \wedge R) \leftrightarrow ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$.
11. $((P \wedge Q) \vee R) \leftrightarrow ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$.
12. $(P \wedge \top) \leftrightarrow P$.

13. $(P \vee F) \leftrightarrow P$.
14. $(P \wedge F) \leftrightarrow F$.
15. $(P \vee T) \leftrightarrow T$.
16. $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R))$.
17. $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$.

追加問題 1.5 命題変数 P, Q, R を使った次の命題論理式が恒真命題であることを証明せよ.

1. $((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$.
2. $((P \wedge Q) \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.
3. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((R \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow Q))$.

追加問題 1.6 次の論理パズルはスマリヤンの別の本に依拠する [1].

国勢調査員のマグレガーが「騎士と奇人の島」というヘンテコな島の調査に行く。その島には騎士と奇人しかおらず、騎士は本当のことしか言わず、奇人は間違ったことしか言わない。マグレガーは結婚しているカップルだけを調査の対象にした。

ケース 1: マグレガーがドアをノックすると、夫がドアを半分開いて用件を聞いた。マグレガーはそれに答えて、「国勢調査をしています。あなた方ご夫妻についてお尋ねしたいのですが、それぞれ騎士と奇人のどちらですか？」

「両方とも奇人だよ！」

夫と妻はそれぞれどちらに属するか？

ケース 2: 隣りの家でマグレガーが夫の方に尋ねた。「お宅は両方とも奇人ですか？」答は「少なくとも片方はね。」

さて、各々どちらか？

ケース 3: マグレガーが次に訪問した家はまたもや難問を出した。ドアをおずおずと開けた内気そうな男に、マグレガーが夫婦がそれぞれどちらか訪ねると、男の答はこれだけだった。「もし私が騎士ならば私の妻も騎士です。」

ちょっと不機嫌になったマグレガーは、歩き去りながら考えた「こんなあいまいな答じゃ何もわかんないじゃないか！」そしてメモに「夫・

妻—両方とも不詳」と書こうとしたちょうどそのとき、彼は大学時代の論理学の講義のことを思い出した。「そうだよ！夫・妻の両方ともわかるじゃないか。」

夫・妻、それぞれどちらか？

この演習問題の主旨は、記号論理を使ってこの3つのパズルを解くことである。命題 P が「夫は奇人である」こと、命題 Q が「妻は奇人である」ことを表すとする。

1. ケース 1 で夫が言ったこと「両方とも奇人だよ！」を P と Q を使った命題論理式で表せ。
2. ケース 2 で夫が言ったこと (の意味すること) 「少なくとも片方は奇人だよ」を P と Q を使った命題論理式で表せ。
3. ケース 3 で夫が言ったこと「もし私が騎士ならば私の妻も騎士です」を P と Q を使った命題論理式で表せ。
4. それぞれのケースにおいて、「夫が奇人であるとき、そのときに限り、夫の言うことは間違っている」ということを、 P と Q を使った命題論理式によって書き下せ。
5. 前問で得られた命題論理式の真理値表を書き下すことにより、それぞれのケースにおいて、夫と妻が騎士なのか奇人なのか、決定せよ。

参考文献

- [1] レイモンド・スマリヤン (著), 長尾 確, 田中 朋之 (訳) 『決定不能の論理パズル』, 白揚社, 1990 年.
- [2] レイモンド・M・スマリヤン (著), 市場 泰男 (訳), 『パズルランドのアリス II 鏡の国篇』, 早川書房, 2004 年.