離散数学 **2012 年 8 月 7 日**
期末試験 **岡本 吉央**

19:30〜21:00．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．

問題 1． 以下の 2 つの問いに答えよ．

1. 命題変数 P, Q を使った命題論理式 $((P \to Q) \land \neg Q) \to \neg P$ が恒真命題であることを，真理値表を書くことによって証明せよ．
2. 命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して，述語論理式 $(\forall\, x\ (P(x)) \to Q) \leftrightarrow \exists\, x\ (P(x) \to Q)$ を考える．同値変形によって，この論理式の恒真性を証明せよ．

問題 2． 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{5, 6, 7\}$ を考え，関数 $f\colon A \to B$ を $f(1) = 6$，$f(2) = 6$，$f(3) = 5$，$f(4) = 6$ として定義する．このとき，次の集合は何になるか？ その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1. $B \times A$.
2. 2^B，すなわち，B の冪集合．
3. $f(\{1, 2\})$.
4. $f^{-1}(\{6, 7\})$.

問題 3． 任意の集合 A, B，任意の関数 $f\colon A \to B$，任意の集合 $X, X' \subseteq A$ に対して，

$$X \subseteq X' \text{ ならば } f(X) \subseteq f(X')$$

となることを証明せよ．

問題 4． 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

であるとして定義する．

1. 関数 f が全射ではないことを証明せよ．
2. 関数 f が単射ではないことを証明せよ．

問題 5．

1. $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, |)$ という半順序集合のハッセ図を描け．ただし，$a \mid b$ であることを「a は b の約数である」と定義する．
2. 上問の半順序集合に対して，次の問いに答えよ．ただし，該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ．
   (a) $\{6, 10\}$ の下界をすべて挙げよ．
   (b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ の極大元をすべて挙げよ．

問題 6． 3 以上の任意の正の整数 n に対して $12n < 4^n$ となることを数学的帰納法により証明せよ．

以上