I482F 実践的アルゴリズム特論
(13) 乱択アルゴリズム：乱択による高速化

岡本 吉央
okamotoy@jaist.ac.jp

北陸先端科学技術大学院大学

2011 年 7 月 2 日

"最終更新：2011/07/02 12:01"

乱択アルゴリズムとは？

乱択アルゴリズム (randomized algorithm) **とは？**

乱数を使用するアルゴリズム

乱数を使用することのメリット

- アルゴリズム設計と実装が単純になる場合がある
- アルゴリズムの高速化が可能になる場合がある
- アルゴリズムの近似性能が上がる場合がある

乱数を使用することのデメリットとその解消

- アルゴリズムに望む性質が常に保証されるわけではなくなる
  - 例：停止しなくなる場合があるかもしれない
  - 解消法：「高い確率」で性質が保証されることを目指す
- アルゴリズムが乱数を作る必要が出てくる
  - 参考：擬似乱数生成 (pseudo-random number generation)
  - 解消法 (？)：その部分はブラックボックスとして扱う

排反事象と独立事象

この講義で扱う確率はすべて離散確率 (確率空間が有限か可算無限)

- 2 **つの事象** A **と** B **が排反** (disjoint) **であるとは**

$$\Pr(A \text{ かつ } B) = 0$$

  であること (注：離散確率の場合の定義)

- 2 **つの事象** A **と** B **が独立** (independent) **であるとは**

$$\Pr(A \text{ かつ } B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

  であること

条件付き確率

事象 A のもとでの B の条件付き確率 (conditional probability) **とは**

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \text{ かつ } B)}{\Pr(A)}$$

例：公平なサイコロを 1 つ振る
偶数が出たという条件のもとで 2 が出る確率は

$$\frac{\Pr(\text{偶数が出て，かつ，2 が出る})}{\Pr(\text{偶数が出る})} = \frac{\Pr(\text{2 が出る})}{\Pr(\text{偶数が出る})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

偶数が出たという条件のもとで 3 が出る確率は

$$\frac{\Pr(\text{偶数が出て，かつ，3 が出る})}{\Pr(\text{偶数が出る})} = \frac{\Pr(\emptyset)}{\Pr(\text{偶数が出る})} = 0$$

期待値と条件付き期待値

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ **上の実数値確率変数** X **の期待値** (expectation) **とは**

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i)$$

事象 A **のもとでの** X **の条件付き期待値** (conditional expectation) **とは**

$$\mathrm{E}[X|A] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i|A)$$

性質

全体事象が A **と** B **に分割されるとき**

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X|A]\Pr(A) + \mathrm{E}[X|B]\Pr(B)$$

3 **つ以上の事象に分割されるときも同様**

期待値の線形性

性質 (期待値の線形性，linearity of expectation)

2 つの実数値確率変数 X, Y に対して

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

例：サイコロを 2 回振ったとき，1 回目の出目を X，2 回目の出目を Y とする

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

乱択アルゴリズムの解析でよく用いられる不等式

マルコフの不等式 (Markov's inequality)

非負値確率変数 $X \geq 0$ と正実数 $t > 0$ に対して

$$\Pr(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{t}$$

証明：離散確率のときのみ証明 (連続確率の場合も同様)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \underbrace{i}_{\geq 0} \cdot \Pr(X = i) + \sum_{i=t}^{\infty} \underbrace{i}_{\geq t} \cdot \Pr(X = i) \\
&\geq \sum_{i=t}^{\infty} t \cdot \Pr(X = i) = t \sum_{i=t}^{\infty} \Pr(X = i) = t \cdot \Pr(X \geq t)
\end{aligned}$$

$\square$

1. 乱択の重要性
2. 確率の復習
3. **乱択による高速化：前進問題**
4. 今日のまとめ

前進問題

前進問題 (Going-forward problem)

設定

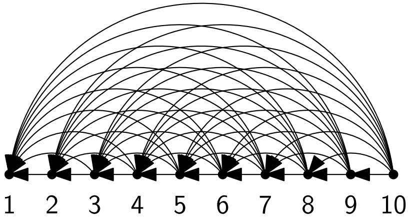
- 頂点集合を $\{1, 2, \ldots, n\}$ とする有向グラフ
- 大きな数から小さな数へ向かう辺が必ず存在

行うこと

- 頂点 n から始めて，辺をたどることで頂点 1 に到達

問題

- 辺をいくつたどれば頂点 1 に到達できるか？



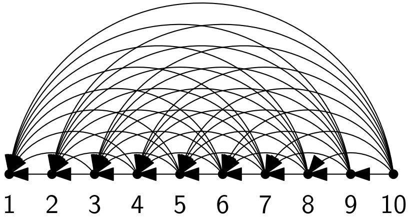
単純なアルゴリズム 1 (乱数を使わない)

1. たどる辺を**任意**に選び，辺の先に移動する
2. 移動先から出る辺がなければ終了，そうでなければ 1 に戻る

たどる辺の数

- 最悪の場合：$n - 1$ 個
- (最善の場合：1 個)

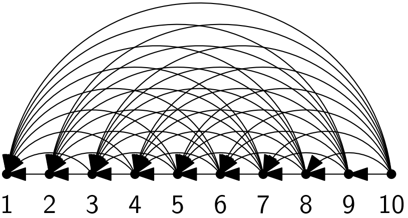
最悪計算量の意味では，よくないアルゴリズム



単純なアルゴリズム 2 (乱数を使う)

1. たどる辺を**一様分布に従って**に選び，辺の先に移動する
2. 移動先から出る辺がなければ終了，そうでなければ 1 に戻る

一様分布に従って選ぶ	$\equiv$	出る辺が k 個ある場合，それぞれを確率 $1/k$ で選ぶ



たどる辺の数の期待値

定理 1

単純なアルゴリズム 2 がたどる辺の数の期待値は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

注：次の H_n は n 次調和数 (n-th harmonic number) **と呼ばれる**

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

事実として，$H_n = \ln n + O(1)$ が成り立つ

定理 1 の言い換え

単純なアルゴリズム 2 がたどる辺の数の期待値は $H_{n-1} = O(\log n)$

定理 1 の証明 (1)

- 任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$R_k = \text{頂点 } k \text{ から始めて，頂点 } 1 \text{ への到達までにたどる辺数}$$

とする

- このとき，$\mathrm{E}[R_1] = 0$ で，$k \geq 1$ のとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[R_k] &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[R_k \mid \text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}] \\
&\qquad \cdot \Pr(\text{頂点 } k \text{ から頂点 } i \text{ に向かう辺を選ぶ}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (\mathrm{E}[1 + R_i]) \cdot \frac{1}{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (1 + \mathrm{E}[R_i]) \cdot \frac{1}{k-1} \\
&= 1 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[R_i]
\end{aligned}$$

- この再帰式を解きたい

定理 1 の証明 (2)

- 両辺を $k-1$ 倍すると，$k \geq 1$ のとき

$$(k-1)\mathrm{E}[R_k] = k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[R_i]$$

- よって，$k \geq 2$ のとき

$$(k-2)\mathrm{E}[R_{k-1}] = k - 2 + \sum_{i=1}^{k-2} \mathrm{E}[R_i]$$

- 上の式から下の式を引くと，$k \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
(k-1)\mathrm{E}[R_k] - (k-2)\mathrm{E}[R_{k-1}] &= 1 + \mathrm{E}[R_{k-1}] \\
(k-1)\mathrm{E}[R_k] - (k-1)\mathrm{E}[R_{k-1}] &= 1 \\
\mathrm{E}[R_k] &= \frac{1}{k-1} + \mathrm{E}[R_{k-1}]
\end{aligned}$$

定理 1 の証明 (3)

- したがって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[R_k] &= \frac{1}{k-1} + \mathrm{E}[R_{k-1}] \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \mathrm{E}[R_{k-2}] \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-3} + \mathrm{E}[R_{k-3}] \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-3} + \cdots + \frac{1}{1} + \underbrace{\mathrm{E}[R_1]}_{=0} \\
&= H_{k-1}
\end{aligned}
$$

- 特に

$$\mathrm{E}[R_n] = H_{n-1}$$

□

期待値が分かるとなぜよいか？

- たどる辺数の期待値が分かったからといって，アルゴリズムがそれだけの辺数しかたどらないとは限らない (乱数を使っているから)
- しかし，

$$\begin{aligned}\Pr(R_n \geq 2H_{n-1}) &\leq \frac{\mathrm{E}[R_n]}{2H_{n-1}} \qquad \text{(Markov の不等式)}\\ &= \frac{H_{n-1}}{2H_{n-1}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- つまり，$\Pr(R_n < 2H_{n-1}) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$ 以上の確率で，たどる辺数は少ない ($2H_{n-1}$ 未満)

もう少し頑張ってみる：確率変数の指数関数

- R_n の代わりに 2^{R_n} を考えてみる

定理 2

任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\mathrm{E}[2^{R_k}] = k$$

- すなわち，

$$\begin{aligned}\Pr(R_n \geq 2\log_2 n) &= \Pr(2^{R_n} \geq 2^{2\log_2 n}) \\ &= \Pr(2^{R_n} \geq n^2) \\ &\leq \frac{\mathrm{E}[2^{R_n}]}{n^2} = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

- つまり，$1 - \frac{1}{n}$ 以上の確率でたどる辺数は少ない ($2\log_2 n$ 未満)

定理 2 の証明 (1)

定理 1 と同様に進める

- $\mathrm{E}[2^{R_1}] = 2^0 = 1$ で，$k \geq 1$ のとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[2^{R_k}] &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[2^{R_k} \mid \textbf{頂点 } k \textbf{ から頂点 } i \textbf{ に向かう辺を選ぶ}] \\
&\qquad \cdot \Pr(\textbf{頂点 } k \textbf{ から頂点 } i \textbf{ に向かう辺を選ぶ}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[2^{1+R_i}] \cdot \frac{1}{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[2 \cdot 2^{R_i}] \cdot \frac{1}{k-1} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} 2\,\mathrm{E}[2^{R_i}] \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{2}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[2^{R_i}]
\end{aligned}$$

- **この再帰式を解きたい**

定理 2 の証明 (2)

- 両辺を $k-1$ 倍すると，$k \geq 1$ のとき

$$(k-1)\mathrm{E}[2^{R_k}] = 2\sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{E}[2^{R_i}]$$

- よって，$k \geq 2$ のとき

$$(k-2)\mathrm{E}[2^{R_{k-1}}] = 2\sum_{i=1}^{k-2} \mathrm{E}[2^{R_i}]$$

- 上の式から下の式を引くと，$k \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}(k-1)\mathrm{E}[2^{R_k}] - (k-2)\mathrm{E}[2^{R_{k-1}}] &= 2\mathrm{E}[2^{R_{k-1}}] \\ \mathrm{E}[2^{R_k}] &= \frac{k}{k-1}\mathrm{E}[2^{R_{k-1}}]\end{aligned}$$

定理 2 の証明 (3)

- したがって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[2^{R_k}] &= \frac{k}{k-1}\mathrm{E}[2^{R_{k-1}}] \\
&= \frac{k}{k-1}\cdot\frac{k-1}{k-2}\mathrm{E}[2^{R_{k-2}}] \\
&= \cdots \\
&= \frac{k}{k-1}\cdot\frac{k-1}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}\mathrm{E}[2^{R_1}] \\
&= k
\end{aligned}
$$

$\square$

前進問題：まとめ

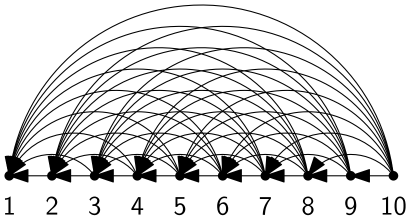
乱数を使わないアルゴリズム

- **最悪時：たどる辺数** $= n - 1$

乱数を使うアルゴリズム

- **期待値：たどる辺数** $= H_{n-1}\ (= \ln n + O(1))$
- **高確率：たどる辺数** $= O(\log n)$

$\therefore$ **乱数を使うことで，問題を高速に解けた**



1. 乱択の重要性
2. 確率の復習
3. 乱択による高速化：前進問題
4. 今日のまとめ

今日のまとめ

乱択アルゴリズム

乱数を使用するアルゴリズム

- アルゴリズム設計と実装が単純になる場合がある
- アルゴリズムの高速化が可能になる場合がある

乱択による高速化

例：前進問題 $(O(n) \to O(\log n))$

解析の方法論

- 確率変数の指数関数
- 期待値の計算
- 「Markov の不等式」の利用

参考文献

- 乱択アルゴリズムについて
  - 玉木久夫．乱択アルゴリズム．共立出版，2008．
  - 結城浩．数学ガール/乱択アルゴリズム．ソフトバンククリエイティブ，2011．
  - R. Motwani, P. Raghavan. Randomized Algorithms. Cambridge University Press, 1998.
  - M. Mitzenmacher, E. Upfal. Probability and Computing. Cambridge University Press, 2005. (日本語訳：小柴健史，河内亮周訳．確率と計算．共立出版，2009．)