I482F 実践的アルゴリズム特論
(11) 厳密アルゴリズム：分枝限定法

岡本 吉央
okamotoy@jaist.ac.jp

北陸先端科学技術大学院大学

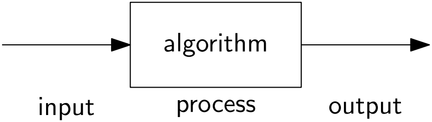
2011 年 6 月 25 日

"最終更新：2011/06/24 14:59"

アルゴリズムとは

アルゴリズムがすること (簡単に言うと)

- データを受け取り (入力)
- それを処理し (処理)
- 結果を返す (出力)



アルゴリズムに要求されること

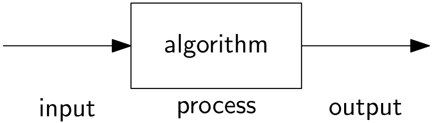
- どんな入力に対しても (入力の普遍性)
- 高速に処理し (処理の高速性)
- 正しい結果を返す (出力の正当性)

この 3 つの要求を緩和できる場合がある

緩和の仕方 (2)：「処理の高速性」の緩和

アルゴリズムに要求されること

- どんな入力に対しても (入力の普遍性)
- **高速に処理し** (処理の高速性)
- 正しい結果を返す (出力の正当性)



「処理の高速性」の緩和

- どんな入力に対しても (入力の普遍性)
- **ある程度の速さで処理し** (処理の高速性の緩和)
- 正しい結果を返す (出力の正当性)

分枝限定法とは？

分枝限定法 (branch-and-bound method)

系統的な場合分けによって解を探索する方法
大きく，2 つの部分から構成される

- 分枝操作 (branching)：1 つの入力を複数の入力に分割する
- 限定操作 (bounding)：分枝操作が不必要である場合に打ち切る

この講義の目標

次の理解

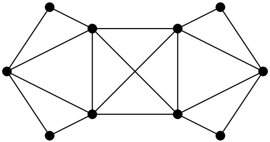
- 分枝限定法の典型例を理解
- 分枝限定法の性能解析を理解

例として用いる問題：頂点被覆問題

頂点被覆問題 (判定問題)

- **入力**：**無向グラフ** $G = (V, E)$，**自然数** k
- **出力**：G **が要素数** k **以下の頂点被覆を持てば**「Yes」，**そうでなければ**「No」

G **の頂点被覆** (vertex cover)：
頂点部分集合 S **で，どの辺の端点も** 1 **つは** S **に含まれるもの**

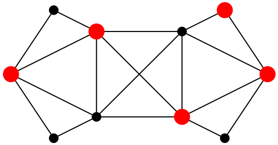


例として用いる問題：頂点被覆問題

頂点被覆問題 (判定問題)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k
- 出力：G が要素数 k 以下の頂点被覆を持てば「Yes」，そうでなければ「No」

G の頂点被覆 (vertex cover)：
頂点部分集合 S で，どの辺の端点も 1 つは S に含まれるもの

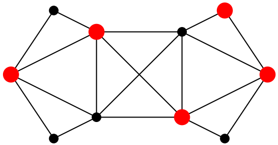


例として用いる問題：頂点被覆問題

頂点被覆問題 (判定問題)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k
- 出力：G が要素数 k 以下の頂点被覆を持てば「Yes」，
  そうでなければ「No」

G の頂点被覆 (vertex cover)：
頂点部分集合 S で，どの辺の端点も 1 つは S に含まれるもの



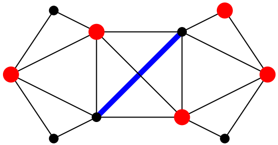
頂点被覆ではない

例として用いる問題：頂点被覆問題

頂点被覆問題 (判定問題)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k
- 出力：G が要素数 k 以下の頂点被覆を持てば「Yes」，そうでなければ「No」

G の頂点被覆 (vertex cover)：
頂点部分集合 S で，どの辺の端点も 1 つは S に含まれるもの



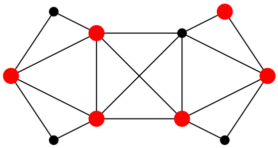
頂点被覆ではない

例として用いる問題：頂点被覆問題

頂点被覆問題 (判定問題)

- **入力：無向グラフ** $G = (V, E)$**，自然数** k
- **出力：**G **が要素数** k **以下の頂点被覆を持てば「**Yes**」，そうでなければ「**No**」**

G **の頂点被覆** (vertex cover)**：**
頂点部分集合 S **で，どの辺の端点も** 1 **つは** S **に含まれるもの**

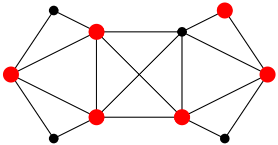


例として用いる問題：頂点被覆問題

頂点被覆問題 (判定問題)

- 入力：無向グラフ $G=(V,E)$，自然数 k
- 出力：G が要素数 k 以下の頂点被覆を持てば「Yes」，
  そうでなければ「No」

G の頂点被覆 (vertex cover)：
頂点部分集合 S で，どの辺の端点も 1 つは S に含まれるもの

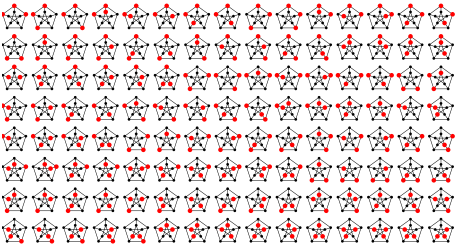


頂点被覆である

すぐに思いつくアルゴリズム

1. 要素数 k の頂点部分集合 $S \subseteq V$ すべてに対して S が G の頂点被覆であるか判定
2. 1 つでも頂点被覆となる S が存在すれば，Yes を出力
3. そうでなければ，No を出力

例：$n = 10,\ k = 3$ の場合



- 反復回数 $= \binom{n}{k} = O(n^k)$

$(n = 10,\ k = 3$ のとき，$\binom{n}{k} = \binom{10}{3} = 120)$

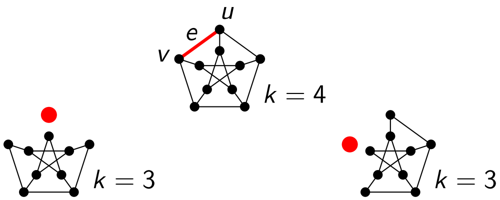
1. 厳密アルゴリズムと分枝限定法
2. 頂点被覆問題
   - 分枝限定法に基づくアルゴリズム 1
   - 分枝限定法に基づくアルゴリズム 2
3. 計算木の葉数の解析
4. 今日のまとめと補足

分枝限定法に基づくアルゴリズム 1：基本アイディア

- 任意の辺 e に着目
- e の端点の 1 つは必ず頂点被覆に含まれる，したがって

観察 1

G に要素数 k の頂点被覆が存在 $\Leftrightarrow$
G から e の端点を除去したグラフに要素数 $k-1$ の頂点被覆が存在



問題点

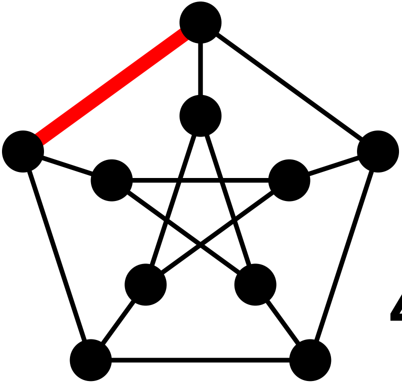
e のどちらの端点を除去したグラフに存在するのか分からない
(よって，両方とも試す)

分枝限定法に基づくアルゴリズム 1

アルゴリズム BB1(G, k)

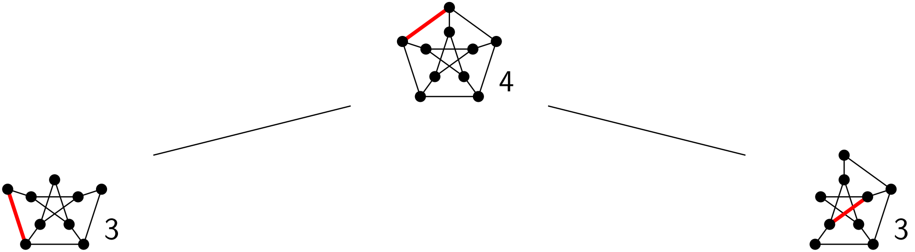
1. G **に辺がないならば，**Yes **を出力して停止**
2. G **に辺があり，**$k \leq 0$ **ならば，**No **を出力して停止**
3. $//G$ **に辺があり，**$k \geq 1$ **のとき**
   1. $e = \{u, v\} \leftarrow G$ **の任意の辺**
   2. BB1$(G - u, k - 1)$ **か** BB1$(G - v, k - 1)$ **が** Yes **を出力するならば，**Yes **を出力して停止**
   3. **そうでなければ，**No **を出力して停止**

BB1：実行例

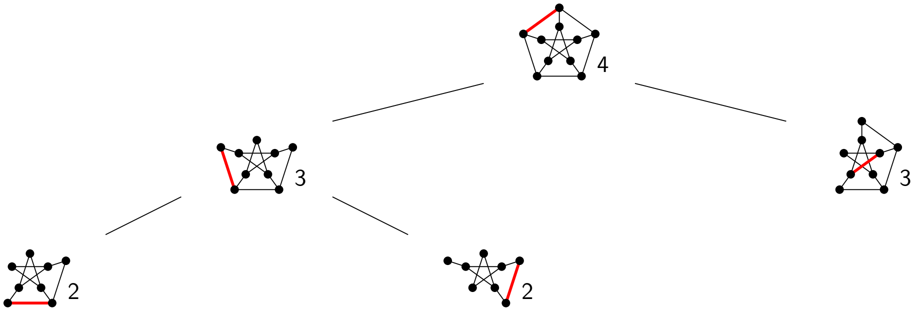


4

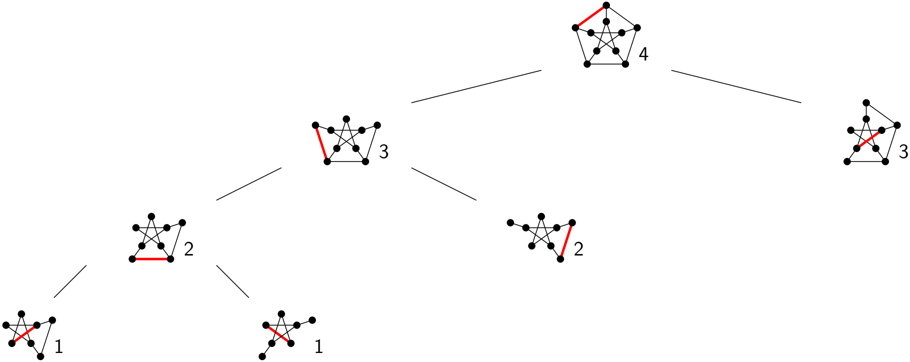
BB1：実行例



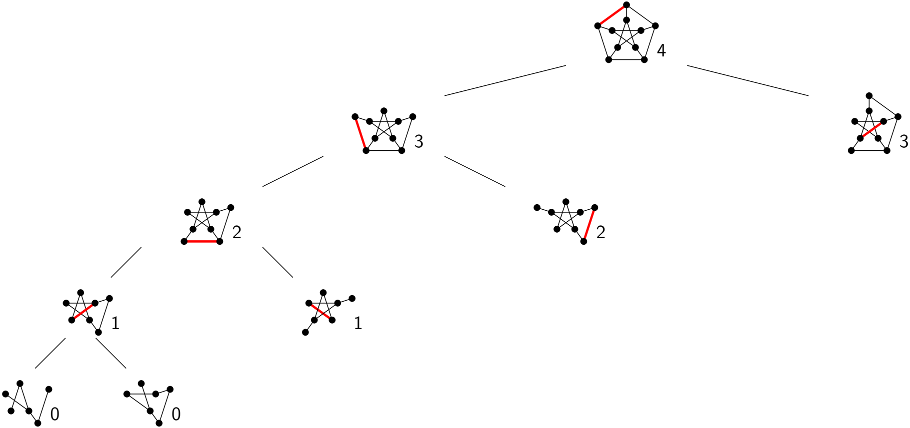
BB1：実行例



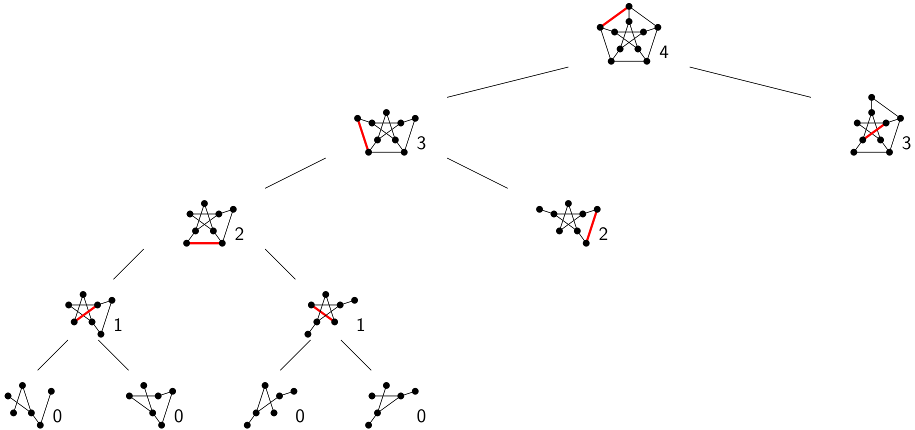
BB1：実行例



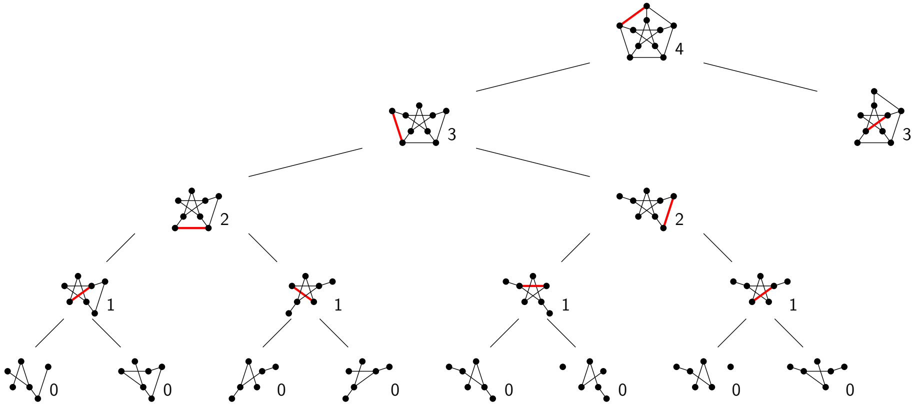
BB1：実行例



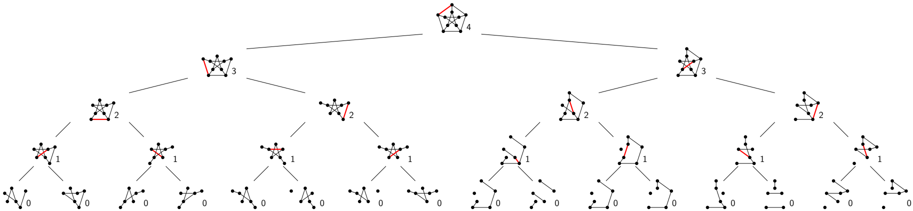
BB1：実行例



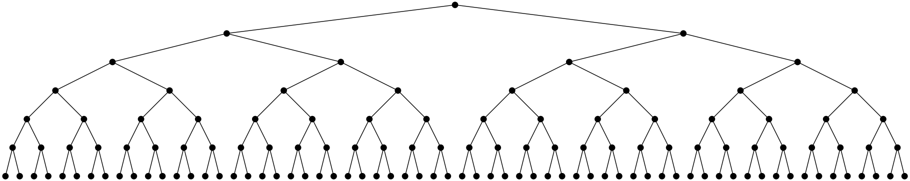
BB1：実行例



BB1：実行例

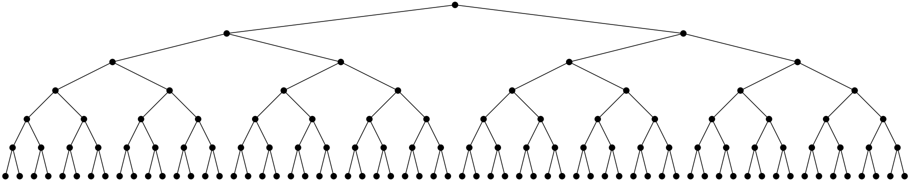


BB1：計算木



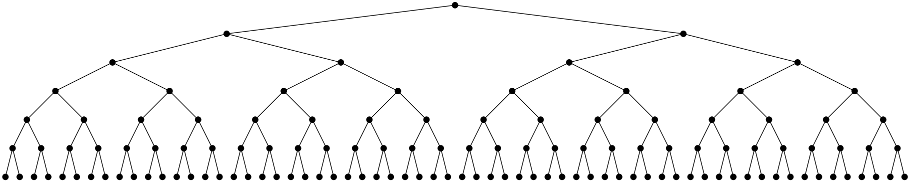
- 1 つのノードがアルゴリズムの実行を表す
- ノードの子はそのアルゴリズムの再帰的実行を表す

BB1：計算量と計算木の関係



- 調べ上げる場合の数 $=$ 計算木の葉の数
- $\therefore$ 計算木の葉の数が計算量に直接影響を与える
- ($\therefore$ 計算木の葉の数がいくつなのか知ることが重要)

BB1：計算木の葉の数



- 入力を G, k としたときの計算木の葉の数は次の式を満たす $L(k)$ 以下

$$L(k) = \begin{cases} 1 & (k = 0 \text{ のとき}) \\ 2L(k-1) & (k > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- この再帰式を解く：$k > 0$ のとき

$$L(k) = 2L(k-1) = 2 \cdot 2L(k-2) = \cdots = 2^k \cdot L(0) = 2^k$$

- $\therefore$ 計算木の葉の数は 2^k 以下

単純なアルゴリズムと分枝限定アルゴリズムの比較

- **単純なアルゴリズムが調べ上げる場合の数** $= \binom{n}{k}$
- **分枝限定アルゴリズムが調べ上げる場合の数** $= 2^k$

$n = 1000$ **の場合**

k	$\binom{n}{k}$	2^k
2	499,500	4
3	166,167,000	8
4	41,417,124,750	16
5	8,250,291,250,200	32
6	1,368,173,298,991,500	64
7	194,280,608,456,793,000	128
8	24,115,080,524,699,431,125	256
9	2,658,017,764,500,203,964,000	512
10	263,409,560,461,970,212,832,400	1,024
11	23,706,860,441,577,319,154,916,000	2,048

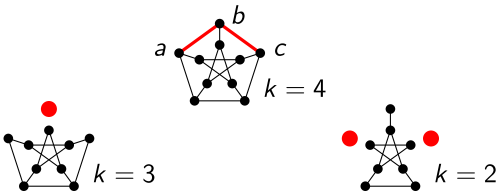
1. 厳密アルゴリズムと分枝限定法
2. 頂点被覆問題
   - 分枝限定法に基づくアルゴリズム 1
   - 分枝限定法に基づくアルゴリズム 2
3. 計算木の葉数の解析
4. 今日のまとめと補足

分枝限定法に基づくアルゴリズム 2：基本アイディア

- 長さ 2 のパス a–b–c に着目
- 頂点被覆には b が含まれるか，あるいは $\{a, c\}$ が含まれる
  したがって，

観察 2

G に要素数 k の頂点被覆が存在 $\Leftrightarrow$
$G - b$ に要素数 $k - 1$ の頂点被覆が存在，または，
$G - \{a, c\}$ に要素数 $k - 2$ の頂点被覆が存在



分枝限定法に基づくアルゴリズム 2

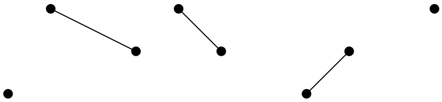
アルゴリズム BB2(G, k)

1. G **に長さ** 2 **のパスがないならば，次のスライドの記述に従う**
2. G **に長さ** 2 **のパスがあり，**$k \leq 0$ **ならば，**No **を出力して停止**
3. $//G$ **に長さ** 2 **のパスがあり，**$k \geq 1$ **のとき**
    1. a–b–$c \leftarrow G$ **の任意の長さ** 2 **のパス**
    2. BB1$(G - b, k - 1)$ **か** BB1$(G - \{a, c\}, k - 2)$ **が** Yes **を出力するならば，** Yes **を出力して停止**
    3. **そうでなければ，**No **を出力して停止**

分枝限定法に基づくアルゴリズム 2 (続き)

アルゴリズム BB2(G, k)

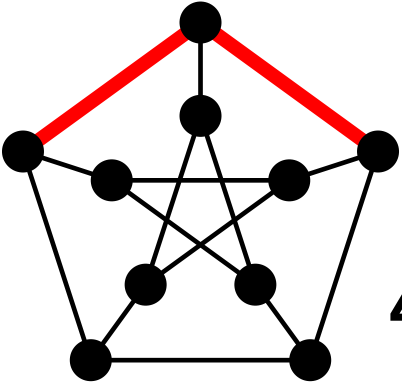
1. G **に長さ** 2 **のパスがないならば，**
   1. G **の辺の数** $\leq k$ **ならば，**Yes **を出力して停止**
   2. **そうでなければ，**No **を出力して停止**



観察 3

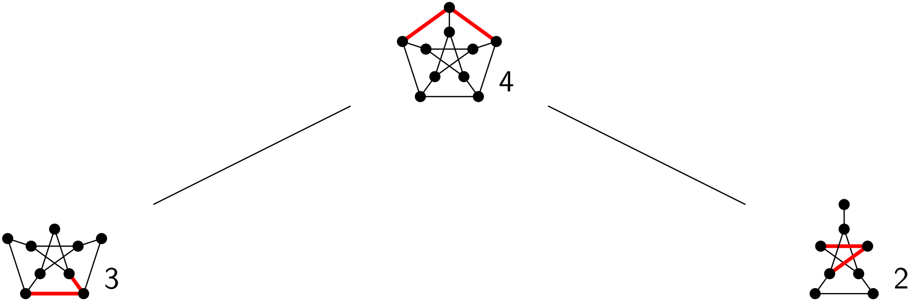
G **に長さ** 2 **のパスがない** $\Rightarrow$ G **の各頂点の次数** ≤ 1

BB2：実行例

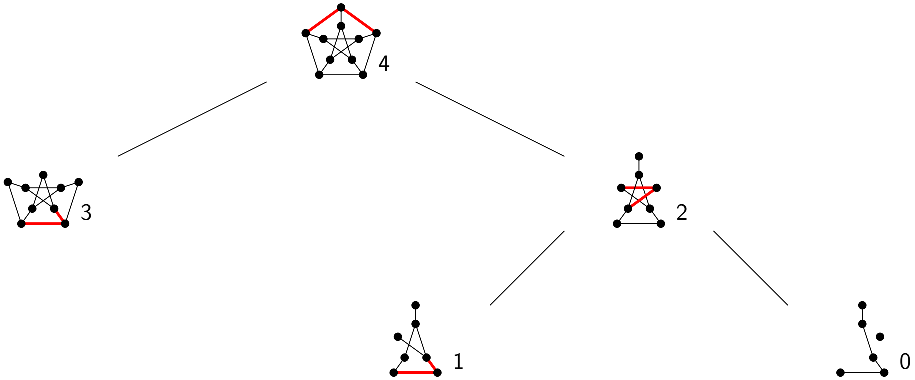


4

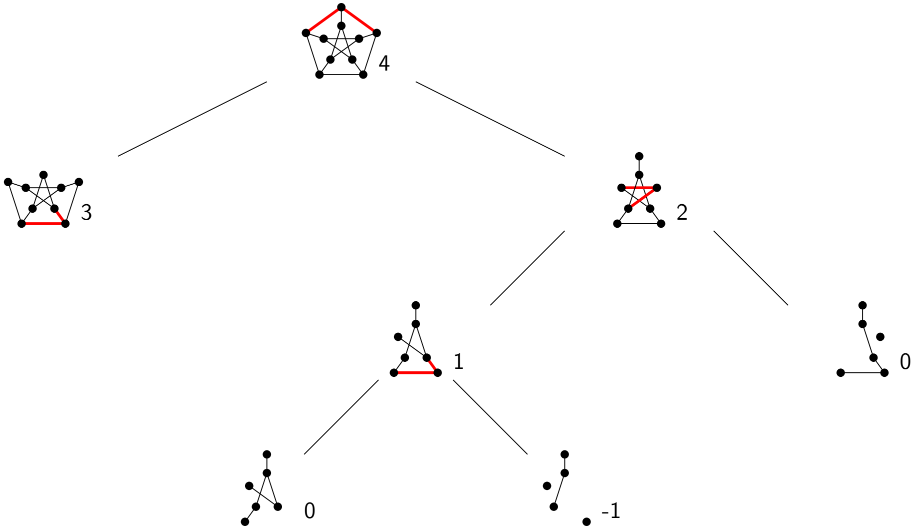
BB2：実行例



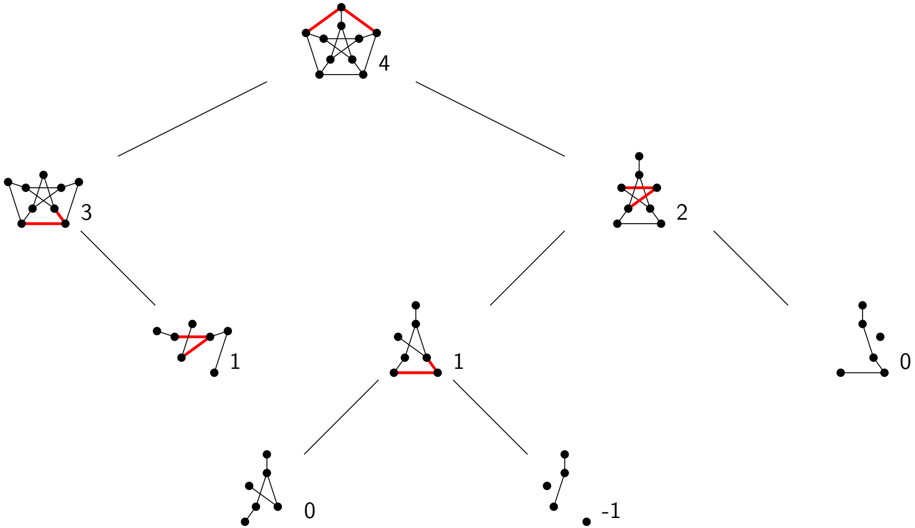
BB2：実行例



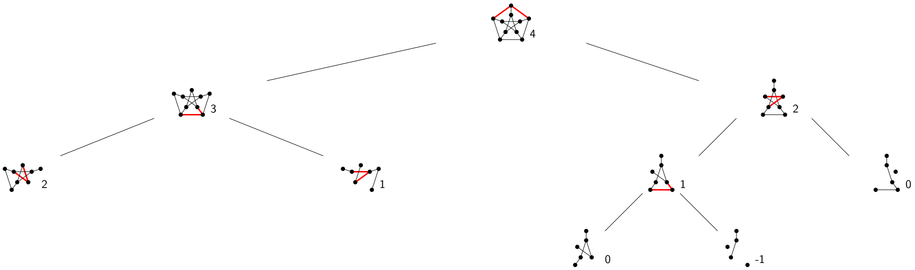
BB2：実行例



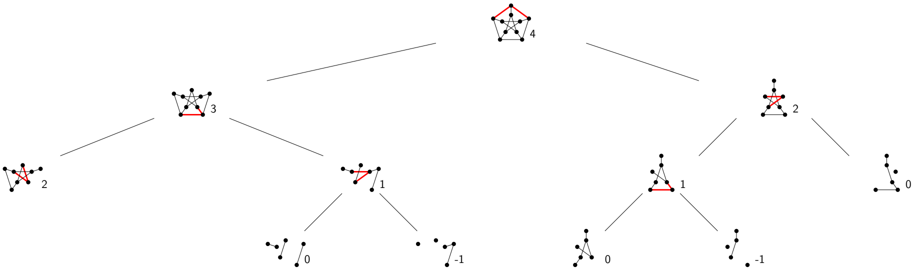
BB2：実行例



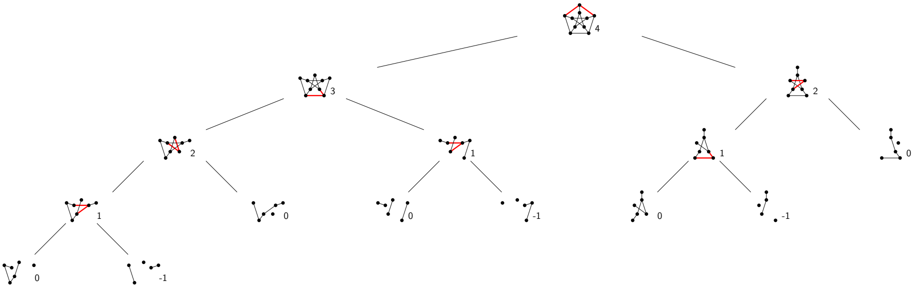
BB2：実行例



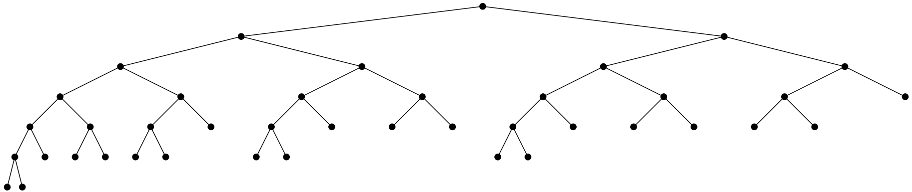
BB2：実行例



BB2：実行例

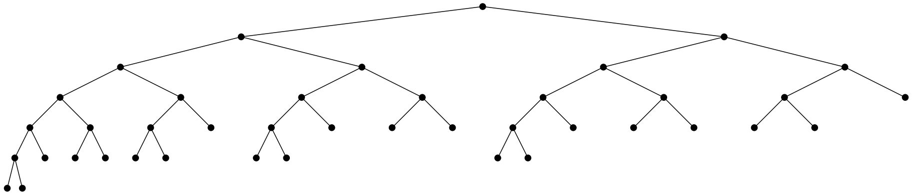


BB2：計算木



- 右の部分木に対応する再帰呼び出しでは k が $k-2$ に変わるため BB1 に比べて木が小さくなっている
- すなわち，葉の数も小さくなっている

BB2：計算木の葉の数



- 入力を G, k としたときの計算木の葉の数は次の式を満たす $L(k)$ 以下

$$L(k) = \begin{cases} 1 & (k \leq 0 \text{ のとき}) \\ L(k-1) + L(k-2) & (k > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- この再帰式を解く (後述)：$k > 0$ のとき

$$L(k) = O(1.619^k)$$

- $\therefore$ 計算木の葉の数は $O(1.619^k)$ 以下

単純なアルゴリズムと分枝限定アルゴリズムの比較

- **分枝限定アルゴリズム** 1 **が調べ上げる場合の数** $= 2^k$
- **分枝限定アルゴリズム** 2 **が調べ上げる場合の数** $= O(1.619^k)$

$n = 1000$ **の場合**

k	2^k	$\lceil 1.619^k \rceil$
2	4	3
3	8	5
4	16	7
5	32	12
6	64	19
7	128	30
8	256	48
9	512	77
10	1,024	124
11	2,048	201

1. 厳密アルゴリズムと分枝限定法
2. 頂点被覆問題
   - 分枝限定法に基づくアルゴリズム 1
   - 分枝限定法に基づくアルゴリズム 2
3. 計算木の葉数の解析
4. 今日のまとめと補足

再帰式をどう解くか？

解きたい再帰式

$$L(k) = \begin{cases} 1 & (k \leq 0 \text{ のとき}) \\ L(k-1) + L(k-2) & (k > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

考え方

- $L(k) = \alpha^k$ と置いて，α を定める
- その α に対して，$L(k) = O(\alpha^k)$

再帰式をどう解くか？ (2)

- $L(k) = \alpha^k$ と置くと，$k > 0$ のとき

$$\alpha^k = \alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}$$

- つまり，

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$

- これを α に関する方程式だと思って解くと

$$\alpha_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

という 2 つの解が得られる (α_+ は正，α_- は負)

再帰式をどう解くか？ (3)

主張

このとき，任意の $k \geq 0$ **に対して，**$L(k) \leq 2\alpha_+^k$ **となる**

証明：帰納法による

- $k = 0$ **のとき：**$L(0) = 1 \leq 2\alpha_+^0$ (done)
- $k = 1$ **のとき：**$L(1) = 2 \leq 2\alpha_+^1$ (done)
- $k \geq 2$ **のとき：任意の** $k' < k$ **に対して** $L(k') \leq 2\alpha_+^{k'}$ **と仮定**
- **このとき**

$$L(k) = L(k-1)+L(k-2) \leq 2\alpha_+^{k-1}+2\alpha_+^{k-2} = 2(\alpha_+^{k-1}+\alpha_+^{k-2}) = 2\alpha_+^k$$

$\square$

よって，$L(k) \leq 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k = O(1.619^k)$

他の再帰

仮に，頂点被覆問題の分枝限定アルゴリズムの解析で，次の再帰式を解く必要が出てきたとする

再帰式 2

$$L(k) = \begin{cases} 1 & (k \leq 0 \text{ のとき}) \\ L(k-2) + L(k-3) + L(k-5) & (k > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

同じように解こうとすると...

他の再帰：どう解くか (1)

- $L(k) = \alpha^k$ と置くと，$k > 0$ のとき

$$\alpha^k = \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} + \alpha^{k-5}$$

が得られ，よって，α に関する次の方程式が得られる

$$\alpha^5 = \alpha^3 + \alpha^2 + 1$$

- これを (数値的に) 解くと，正の実数解は

$$\alpha_+ = 1.430$$

の唯一つ (ただし，小数点以下第 4 位で切り上げ)

他の再帰：どう解くか (2)

主張

このとき，任意の $k \geq 0$ に対して，$L(k) \leq 7\alpha_+^k$ となる

証明：帰納法による

- $k = 0$ のとき：$L(0) = 1 \leq 7\alpha_+^0$ (done)
- $k = 1$ のとき：$L(1) = 3 \leq 7\alpha_+^1$ (done)
- ...
- $k = 4$ のとき：$L(4) = 7 \leq 7\alpha_+^4$ (done)
- $k \geq 5$ のとき：任意の $k' < k$ に対して $L(k') \leq 7\alpha_+^{k'}$ と仮定
- このとき

$$\begin{aligned} L(k) &= L(k-2) + L(k-3) + L(k-5) \leq 7\alpha_+^{k-2} + 7\alpha_+^{k-3} + 7\alpha_+^{k-5} \\ &= 7(\alpha_+^{k-2} + \alpha_+^{k-3} + \alpha_+^{k-5}) = 7\alpha_+^k \end{aligned}$$

□

よって，$L(k) \leq 7 \cdot 1.430^k = O(1.430^k)$

葉数の解析が示唆する分枝限定アルゴリズムの設計法

たとえば

次の再帰式を満たす $L_1(k), L_2(k), L_3(k)$ の中で，どれが一番小さいか

1. $L_1(k) = 2L_1(k-1)$
2. $L_2(k) = 3L_2(k-1)$
3. $L_3(k) = 2L_3(k-2)$

- $L_1(k)$ と $L_2(k)$ を比べると，$L_1(k)$ の方が小さい
  (右辺の係数「2」と「3」の比較)
  … 再帰呼び出しの回数の比較
- $L_1(k)$ と $L_3(k)$ を比べると，$L_3(k)$ の方が小さい
  (右辺のカッコの中「-1」と「-2」の比較)
  … 再帰呼び出しにおける k の変化の比較

今日のまとめ

分枝限定法

系統的な場合分けによって解を探索する方法
大きく，2 つの部分から構成される

- 分枝操作 (branching)：1 つの入力を複数の入力に分割する
- 限定操作 (bounding)：分枝操作が不必要である場合に打ち切る

頂点被覆問題を例として

- すぐに思いつくアルゴリズム：$O(n^k)$
- 辺に着目した分枝限定法：$O(2^k)$
- 長さ 2 のパスに着目した分枝限定法：$O(1.619^k)$

計算木による計算量の解析

- 葉の数の上界を表す再帰式 $L(k) = L(k-1) + L(k-2)$
- $L(k) = \alpha^k$ として，方程式 $\alpha^k = \alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}$ を解く

参考文献

- **厳密アルゴリズムの設計と理論的解析**
  - F.V. Fomin, D. Kratsch. Exact Exponential Algorithms. Springer, 2010.
  - R. Niedermeier. Invitation to Fixed-Parameter Algorithms. Oxford University Press, 2006.
  - **岡本吉央．離散最適化に対する高速な厳密アルゴリズム．オペレーションズ・リサーチ** 50 (2005) 763-769.
  - **岡本吉央**. **固定パラメータ容易性．オペレーションズ・リサーチ** 52 (2007) 535-537.
- **分枝限定アルゴリズムの理論的解析**
  - O. Kullmann. Fundaments of branching heuristics. In: Handbook of Satisfiability, Chapter 7, 2009, pp. 205-244.