I482F 実践的アルゴリズム特論
(10) 近似アルゴリズム：局所探索法

岡本 吉央
okamotoy@jaist.ac.jp

北陸先端科学技術大学院大学

2011 年 6 月 18 日

"最終更新：2011/06/18 12:46"

1. 局所探索法
2. 例 1：巡回セールスマン問題
3. 例 2：最大カット問題
4. 今日のまとめと補足

局所探索法 (局所探索アルゴリズム) とは？

局所探索法 (local search algorithm)

現在の解を少し変更してより良い解を得る，という操作を繰り返す方法

アルゴリズム設計からの視点

- 貪欲法は「構築法」
- 局所探索法は「改善法」

この講義の目標

次の理解

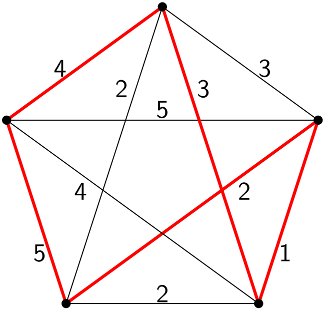
- 局所探索法の典型例を理解
- 局所探索法の性能解析を理解

1. 局所探索法
2. 例 1：巡回セールスマン問題
3. 例 2：最大カット問題
4. 今日のまとめと補足

巡回セールスマン問題

定義：巡回セールスマン問題

- **入力：完全グラフ** $G = (V, E)$，**各辺** e **に対する費用** $c(e)$
- **出力：**G **の巡回路**
- **目的：巡回路に使われている辺の費用和の最小化**

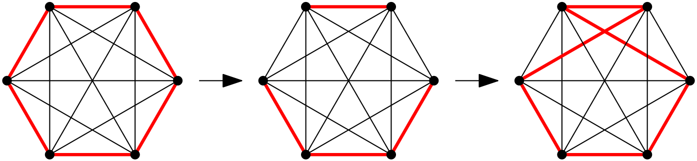


費用和 $= 15$ **費用和** $= 16$

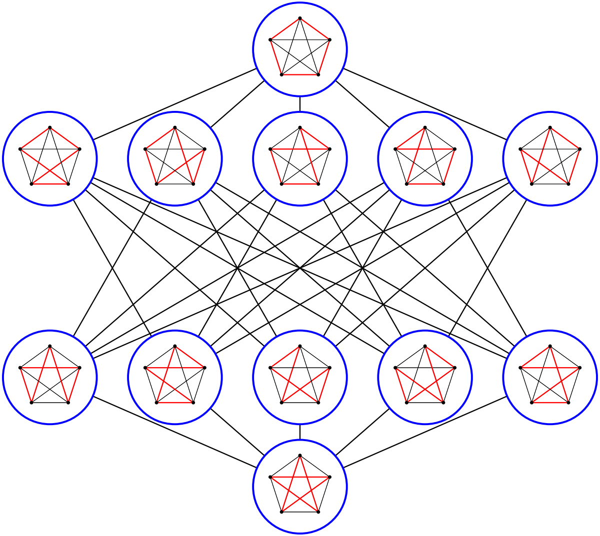
巡回セールスマン問題に対する 2opt 操作

巡回路 T に対して，次の操作を考える　(2opt **操作**と呼ばれる)

1. T の隣接しない 2 辺を取り除く (T が 2 つのパスに分かれる)
2. その 2 つのパスをつないで，T とは違う巡回路を得る

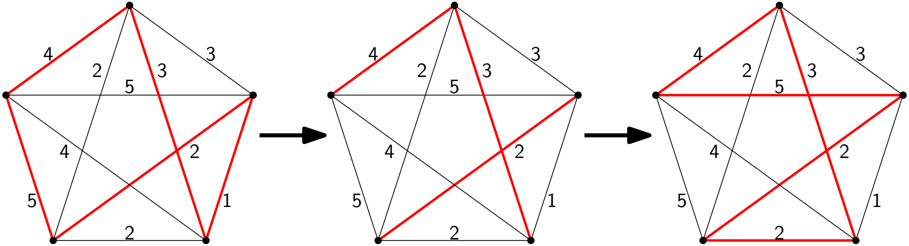


巡回セールスマン問題に対する 2opt 操作：近傍グラフ



巡回セールスマン問題に対する局所探索法 (2opt 操作に基づく)

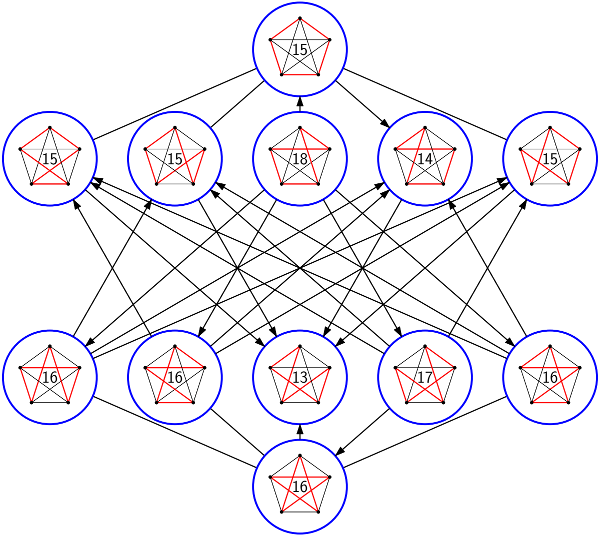
1. **巡回路 T を得る** **(何かしらの方法で)**
2. T **に** 2opt **操作を施して得られた** T' **の費用が** T **よりも小さい** $\Rightarrow$ $T \leftarrow T'$ **として** 2 **を繰り返す**
3. **そのような** T' **がない** $\Rightarrow$ T **を出力して，停止**



費用 $= 16$

費用 $= 15$

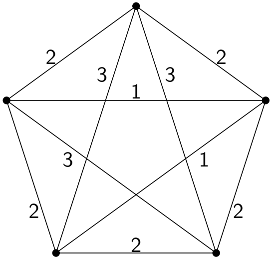
巡回セールスマン問題に対する局所探索法：近傍グラフ

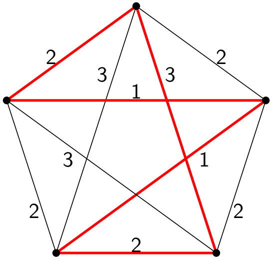


アルゴリズム設計で最初に確認するべきこと (再掲)

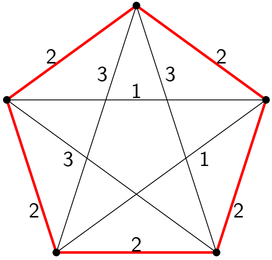
- 考えたアルゴリズムは必ず最適解を出力するのか？
  - 考えたアルゴリズムが最適解を出力しない入力はあるのか？
- 考えたアルゴリズムの近似比はどれほどなのか？
  - 考えたアルゴリズムの近似比が悪いことを示す入力はあるのか？

局所探索法が最適巡回路を出力しない例





$\mathrm{OPT} \leq 9$

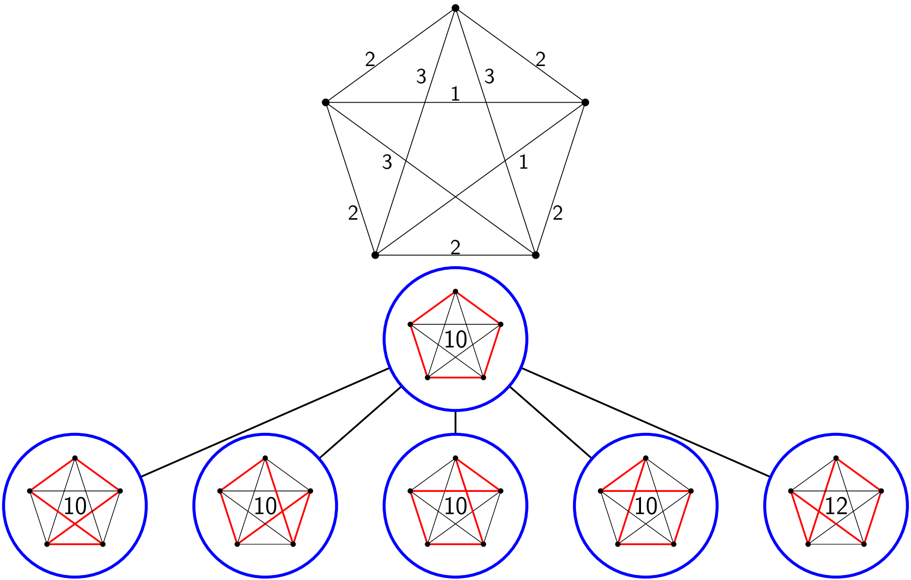


$\mathrm{ALG} = 10$

この例は

- **「局所探索法が最適巡回路を出力しない」ことを示している**
  $\mathrm{ALG} > \mathrm{OPT}$ $\qquad (\because \mathrm{ALG} = 10 > 9 \geq \mathrm{OPT})$
- **「局所探索法の近似比が** 10/9 **より良くはない」ことを示している**
  $\mathrm{ALG} \geq \frac{10}{9}\mathrm{OPT}$ $\qquad (\because \mathrm{ALG} = 10 = \frac{10}{9} \cdot 9 \geq \frac{10}{9}\mathrm{OPT})$

局所探索法が最適巡回路を出力しない例 (続)

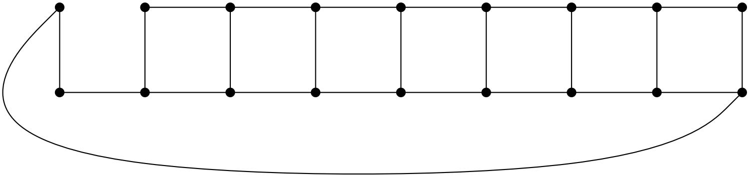


局所探索法の近似比は定数で抑えられない

定理 1 (Papadimitriou, Steiglitz '78)

任意の定数 $\alpha \geq 1$ **に対して，**
巡回セールスマン問題に対する局所探索法の近似比は α **より良くはない**

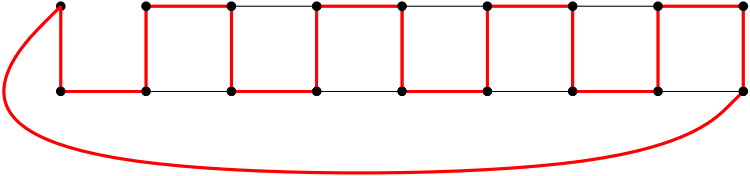
証明：次のような入力を考える (Michiels, Aarts, Korst '07)



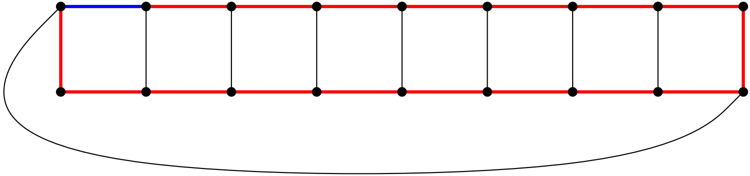
- **これは頂点数** n **の完全グラフ**
- **描いてある辺の費用は** ϵ ($\epsilon > 0$ **は非常に小さな正実数，後で定める**)
- **描いてない辺の費用は** $1 + \epsilon$

定理 1 の証明 (続 1)

- $\mathrm{OPT} \leq n\epsilon$



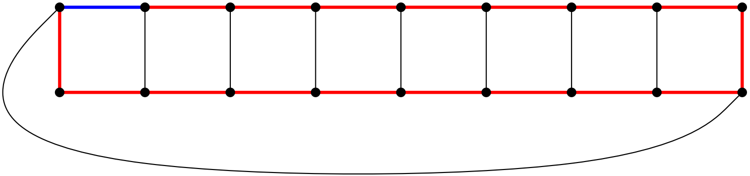
- $\mathrm{ALG} = (1+\epsilon) + (n-1)\epsilon = 1 + n\epsilon$



赤辺の費用は ϵ，青辺の費用は $1+\epsilon$

定理 1 の証明 (続 2)

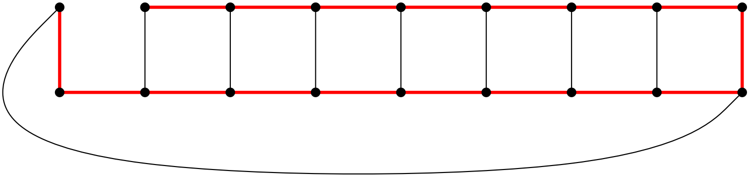
なぜこれが局所探索法の出力なのか？



- この巡回路に 2opt 操作を施して，費用を下げるにはどうするか？
- 「青と赤」を除去し,「黒と黒」を追加しないといけない
- 除去できる青と追加できる黒は唯一に決まる
- すると，もう 1 つ黒を追加できないことが分かる
- ∴ 2opt 操作で，費用を下げることはできない

定理 1 の証明 (続 2)

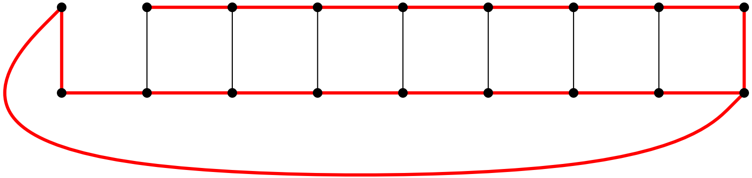
なぜこれが局所探索法の出力なのか？



- **この巡回路に** 2opt **操作を施して，費用を下げるにはどうするか？**
- **「青と赤」を除去し,「黒と黒」を追加しないといけない**
- **除去できる青と追加できる黒は唯一に決まる**
- **すると，もう** 1 **つ黒を追加できないことが分かる**
- $\therefore$ 2opt **操作で，費用を下げることはできない**

定理 1 の証明 (続 2)

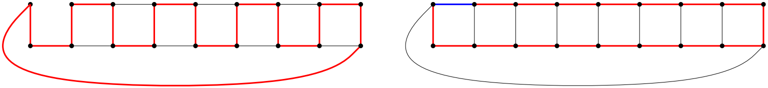
なぜこれが局所探索法の出力なのか？



- この巡回路に 2opt 操作を施して，費用を下げるにはどうするか？
- 「青と赤」を除去し,「黒と黒」を追加しないといけない
- 除去できる青と追加できる黒は唯一に決まる
- すると，もう 1 つ黒を追加できないことが分かる
- $\therefore$ 2opt 操作で，費用を下げることはできない

定理 1 の証明 (続 3)

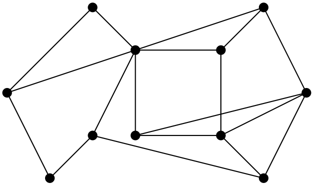
- $\mathrm{OPT} \le n\epsilon$
- $\mathrm{ALG} = 1 + n\epsilon$
- $\therefore \mathrm{ALG} = \frac{1+n\epsilon}{n\epsilon} n\epsilon \ge \left(\frac{1}{n\epsilon} + 1\right) \mathrm{OPT}$
- $\epsilon = \frac{1}{n\alpha}$ と置く (つまり，$n\epsilon = \frac{1}{\alpha}$)
- $\therefore \mathrm{ALG} \ge (\alpha + 1)\mathrm{OPT}$
- よって，近似比は α よりも良くはない $\square$



最大カット問題

定義：最大カット問題

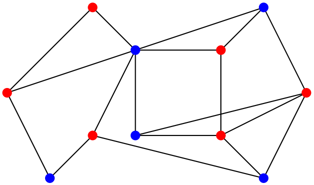
- **入力：無向グラフ** $G = (V, E)$
- **出力：**G **の頂点への赤と青の色割当 (彩色である必要はない)**
- **目的：**2 **端点が** 2 **色で塗られている辺** (2 **色辺**) **の数の最大化**



最大カット問題

定義：最大カット問題

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G の頂点への赤と青の色割当 (彩色である必要はない)
- 目的：2 端点が 2 色で塗られている辺 (2 色辺) の数の最大化

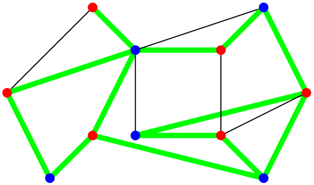


2 色辺の数 $= 13$

最大カット問題

定義：最大カット問題

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G の頂点への赤と青の色割当 (彩色である必要はない)
- 目的：2 端点が 2 色で塗られている辺 (2 色辺) の数の**最大化**



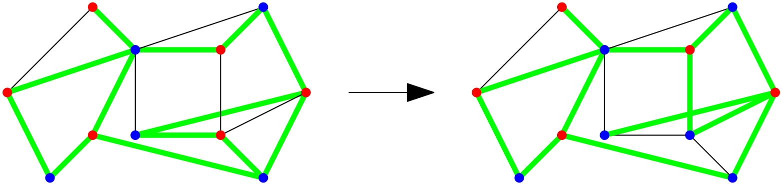
2 色辺の数 $= 13$

最大カット問題に対する反転操作

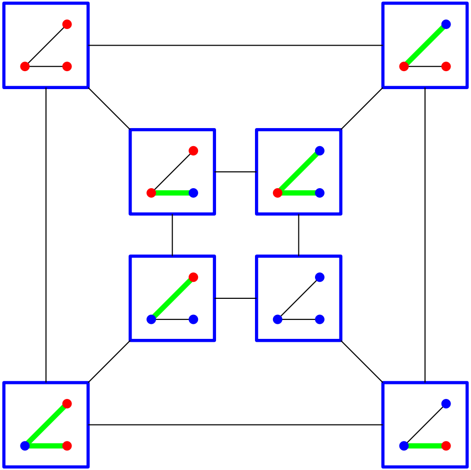
与えられた色割当に対して，次の操作を考える

(**反転操作** (flip) と呼ばれる)

1. グラフの頂点を 1 つ任意に選択する
2. その頂点の色を変更する



最大カット問題に対する反転操作：近傍グラフ



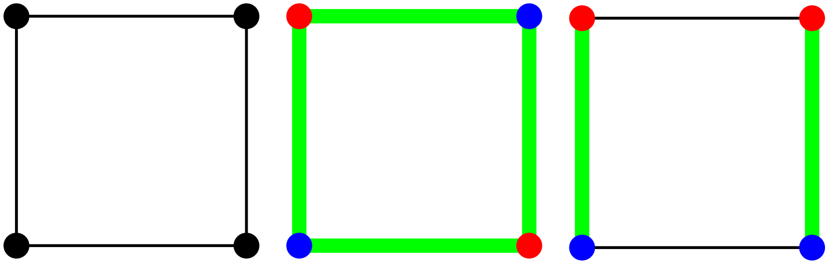
最大カット問題に対する局所探索法

1. 色割当 A を得る (何かしらの方法で)
2. A に反転操作を施して得られた A' の 2 色辺の数が A よりも大 $\Rightarrow$ $A \leftarrow A'$ として 2 を繰り返す
3. そのような A' がない $\Rightarrow$ A を出力して，停止

アルゴリズム設計で最初に確認するべきこと (再掲)

- 考えたアルゴリズムは必ず最適解を出力するのか？
  - 考えたアルゴリズムが最適解を出力しない入力はあるのか？
- 考えたアルゴリズムの近似比はどれほどなのか？
  - 考えたアルゴリズムの近似比が悪いことを示す入力はあるのか？

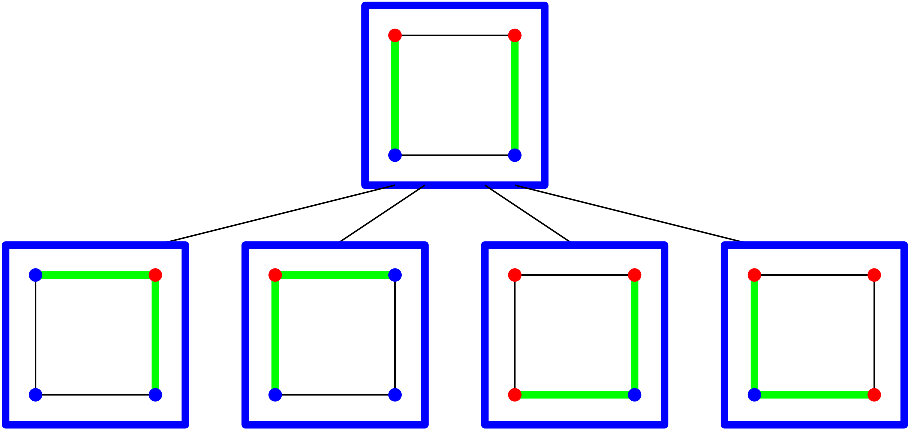
局所探索法が最適解を出力しない例



この例は

- 「局所探索法が最適解を出力しない」ことを示している
  OPT $>$ ALG $\qquad (\because \text{OPT} \geq 4 > 2 = \text{ALG})$
- 「局所探索法の近似比が 2 より良くはない」ことを示している
  OPT $\geq$ 2ALG $\qquad (\because \text{OPT} \geq 4 = 2 \cdot 2 = 2\text{ALG})$

局所探索法が最適解を出力しない例 (続)



局所探索法の近似比

定理 2

最大カット問題に対する局所探索法の近似比は 2 以下．
すなわち，任意の入力に対して，
局所探索法の出力が与える値 ALG と最適値 OPT に

$$\mathrm{OPT} \leq 2 \cdot \mathrm{ALG}$$

という関係が成り立つ

つまり，

- 局所探索法の近似比は 2 以下 (定理 2)
- 局所探索法の近似比は 2 より良くはない (前のスライドの例)
- ∴ 局所探索法の近似比は 2 であり，これはタイト

定理 2 の証明

証明の流れ：入力される無向グラフ G の辺数を m として，次を示す

1. $\mathrm{OPT} \leq m$
2. $\mathrm{ALG} \geq \frac{1}{2}m$

これを示せば，$\mathrm{OPT} \leq m \leq 2 \cdot \mathrm{ALG}$ となり，証明が完了する

示したいこと 1

$\mathrm{OPT} \leq m$

証明：これは簡単 (どうして？) $\square$

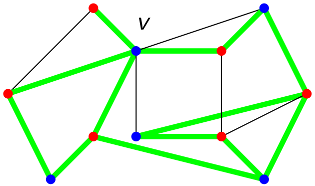
定理 2 の証明 (続 1)

示したいこと 2

$\mathrm{ALG} \geq \frac{1}{2}m$

<u>証明</u>：局所探索法が出力した色割当を考える

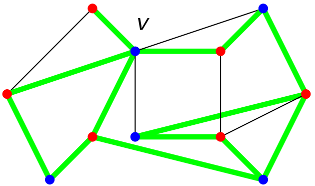
- 任意の頂点 v に対して，次の記法を導入
  - $d(v) = v$ の隣接頂点数 (v の次数)
  - $d_+(v) = v$ の隣接頂点で，v と同色のものの数
  - $d_-(v) = v$ の隣接頂点で，v と異色のものの数



- $d(v) = 6$
- $d_+(v) = 2$
- $d_-(v) = 4$

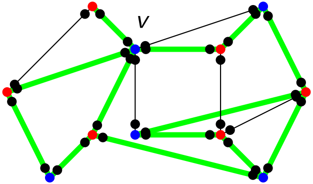
定理 2 の証明 (続 2)

- **観察 1**：$d(v) = d_+(v) + d_-(v)$
- **観察 2**：$d_-(v) \geq d_+(v)$
  - **局所探索法が出力した色割当だから**
- **観察 3**：$d_-(v) \geq \frac{1}{2}d(v)$ **(観察 1 と 2 より)**
- **観察 4**：$2m = (d(v)$ **の和**) **(握手補題)**
- **観察 5**：$2 \cdot \mathrm{ALG} = (d_-(v)$ **の和**)



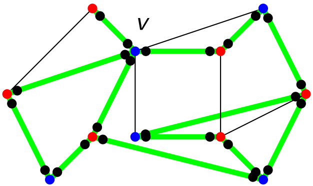
定理 2 の証明 (続 2)

- **観察 1**：$d(v) = d_+(v) + d_-(v)$
- **観察 2**：$d_-(v) \geq d_+(v)$
  - **局所探索法が出力した色割当だから**
- **観察 3**：$d_-(v) \geq \frac{1}{2}d(v)$ **(観察 1 と 2 より)**
- **観察 4**：$2m = (d(v)$ **の和**$)$ **(握手補題)**
- **観察 5**：$2 \cdot \mathrm{ALG} = (d_-(v)$ **の和**$)$



定理 2 の証明 (続 2)

- 観察 1：$d(v) = d_+(v) + d_-(v)$
- 観察 2：$d_-(v) \geq d_+(v)$
  - 局所探索法が出力した色割当だから
- 観察 3：$d_-(v) \geq \frac{1}{2}d(v)$ (観察 1 と 2 より)
- 観察 4：$2m = (d(v)$ の和) (握手補題)
- 観察 5：$2 \cdot \mathrm{ALG} = (d_-(v)$ の和)



定理 2 の証明 (続 3)

よって，

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \mathrm{ALG} &= (d_-(v) \text{ の和}) && \text{(観察 5)}\\
&\geq \frac{1}{2}(d(v) \text{ の和}) && \text{(観察 3)}\\
&= \frac{1}{2} \cdot 2m && \text{(観察 4)}\\
&= m
\end{aligned}
$$

すなわち， $\mathrm{ALG} \geq \frac{1}{2}m$ □

今日のまとめ

近似比

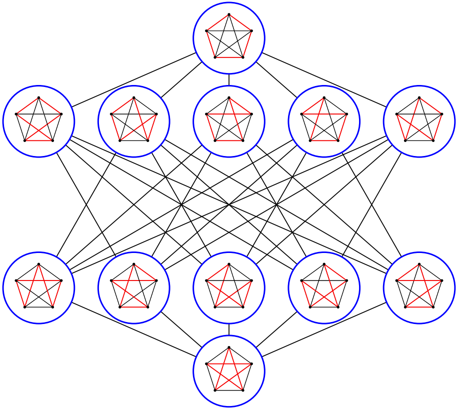
- $\mathrm{OPT} \leq \mathrm{ALG} \leq \alpha \cdot \mathrm{OPT}$ (**最小化問題**)
- $\mathrm{ALG} \leq \mathrm{OPT} \leq \alpha \cdot \mathrm{ALG}$ (**最大化問題**)

局所探索とその例

- **巡回セールスマン問題**
- **最大カット問題**

局所探索法の設計で留意すべきこと

- 近傍グラフを思い描くこと
- 2 つの解の間を局所探索の操作で必ず往来できるようにすること
- 各反復の実行を効率よく行えるようにすること



局所探索法の計算量

注意

紹介した局所探索法は停止まで指数時間かかる例がある

- 巡回セールスマン問題に対する 2opt 操作
  (Lueker '76; Chandra, Karloff, Tovey '99)
- (重み付き) 最大カット問題に対する反転操作
  (Schäffer, Yannakakis '91)

- 実用上は，ある程度の回数 (あるいは時間) で停止させればよい
- しかし，そうすると，近似保証は成り立たなくなるかもしれない

巡回セールスマン問題に対する局所探索法

2opt **操作に基づく局所探索法** (**近似比**)

- **辺費用が三角不等式を満たす場合**
  - **近似比は** $4\sqrt{n}$ **以下** ($n =$ **頂点数**) (Chandra, Karloff, Tovey '99)
  - **近似比は** $\frac{1}{4}\sqrt{n}$ **以上** (Chandra, Karloff, Tovey '99)
- **頂点が平面上の点，費用が** 2 **点間のユークリッド距離に対応する場合**
  - **近似比は** $O(\log n)$ **以下** (Chandra, Karloff, Tovey '99)
  - **近似比は** $\Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$ **以上** (Chandra, Karloff, Tovey '99)

その他の操作

- k-opt：k **個の辺を取り除いて，つなぎ直す**
- Lin-Kernighan：k-opt **の探索に枝刈りを適用** (Lin, Kernighan '73)

最大カット問題に対する局所探索法

反転近傍に基づく局所探索法 (計算量 (反復回数))

- **グラフに制限がない：指数時間** (Schäffer, Yannakakis '91)
- **どの頂点の次数も** 3**：**$O(n^2)$ (Poljak '95)
- **最大次数が** 4**：指数時間** (Monien, Tscheuschener '10)

参考文献

- **局所探索法の理論的解析一般**

  - E. Aarts and J.K. Lenstra (eds.). Local Search in Combinatorial Optimization. Princeton University Press, 2003.
  - W. Michiels, E. Aarts, and J. Korts. Theoretical Aspects of Local Search. Springer, 2007.
  - E. Angel. A survey of approximation results for local search algorithms. Lecture Notes in Computer Science 3484 (2006) 30-73.

- **実用的な近似アルゴリズム設計一般 (貪欲法，局所探索法など)**

  - 柳浦睦憲，茨木俊秀．組合せ最適化—メタ戦略を中心として—．朝倉書店，2001 年．

参考文献

- **参照文献**

  - B. Chandra, H. Karloff, C. Tovey. New results on the old *k*-opt algorithm for the traveling salesman problem. SIAM Journal on Computing 28 (1999) 1998-2029.
  - S. Lin, B.W. Kernighan. An efficient heuristic algorithm for the traveling-salesman problem. Operations Research 21 (1973) 498-516.
  - G. Lueker. Unpublished manuscript, Princeton University, Princeton, NJ, 1975.
  - B. Monien, T. Tscheuschner. On the power of nodes of degree four in the local max-cut problem. Lecture Notes in Computer Science 6078 (2010) 264-275.
  - C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz. Some examples of difficult traveling salesman problems. Operations Research 26 (1978) 434-443.
  - S. Poljak. Integer linear programs and local search for max-cut. SIAM Journal on Computing 24 (1995) 822-839.
  - A.A. Schäffer, M. Yannakakis. Simple local search problems that are hard to solve. SIAM Journal on Computing 20 (1991) 56-87.