I482F 実践的アルゴリズム特論 第 14 回 **2011 年 7 月 2 日**

乱択アルゴリズム：乱択による近似 **岡本 吉央**

演習問題 1. 次のような重み付き最大カット問題を考える．入力は無向グラフ $G=(V,E)$ と各辺 e に対する非負重み $w(e)\geq 0$ である．出力は G の頂点全体に対する赤と青の色割当である (これが彩色になっている必要はない)．目的は，両端点が異なる色で塗られている辺の重み和の最大化である．

この問題に対して,「各頂点に対して一様分布に従って独立に赤か青を割り当てる」というアルゴリズムを考える．このアルゴリズムによって得られた色割当において，両端点が異なる色で塗られている辺の重み和の期待値は，すべての辺の重み和の $\frac{1}{2}$ である．これを証明せよ．

演習問題 2. 最大カット問題は 2 つの色で頂点を塗ったが，3 色で頂点を塗る変種を考える．つまり，入力は無向グラフ $G=(V,E)$ で，出力は G の頂点全体に対する赤，青，緑の色割当である (これが彩色になっている必要はない)．目的は両端点が異なる色で塗られている辺の数の最大化である．

この問題に対して,「各頂点に対して一様分布に従って独立に赤か青か緑を割り当てる」というアルゴリズムを考える．入力グラフの辺の総数を m とする．

1. このアルゴリズムによって得られた色割当において，両端点が異なる色で塗られている辺の数の期待値は $\frac{2}{3}m$ である．これを証明せよ．
2. このアルゴリズムによって得られた色割当において，両端点が異なる色で塗られている辺の数がその期待値 $\frac{2}{3}m$ 未満となる確率の上界で，1 未満となるものを与えよ．(なぜそれが上界になるのかも証明せよ．)
3. 2 で得られた上界を用いることで，上記のアルゴリズムを $m+3$ 回繰返し，その中で出力の辺数が最も大きい色割当を出力するという方法により，両端点が異なる色で塗られている辺の数が $\frac{2}{3}m$ 以上になるような色割当が確率 $\frac{7}{8}$ 以上で得られることを証明せよ．(ヒント：自然対数の底 e は 2 より大きい，という事実を用いてもよい．)

演習問題 3. 最大独立集合問題に対して，講義では頂点を一様分布に従って一列に並べ，その順序に従って独立集合を構成する乱択アルゴリズムを議論した．各頂点の次数が 9 であるとき，このアルゴリズムが出力する独立集合の要素数の期待値は $\frac{n}{10}$ 以上であった．ただし，n は入力グラフの頂点数である．

1. このアルゴリズムによって得られた独立集合の要素数が $\frac{n}{10}$ 未満となる確率の上界で，1 未満となるものを与えよ．(なぜそれが上界になるのかも証明せよ．)
2. 2 で得られた上界を用いることで，上記のアルゴリズムを $9n+10$ 回繰返し，その中で頂点数が最も大きい独立集合を出力するという方法により，要素数が $\frac{n}{10}$ 以上の独立集合が確率 $\frac{511}{512}$ 以上で得られることを証明せよ．(ヒント：自然対数の底 e は 2 より大きい，という事実を用いてもよい．)

観念的演習問題 4. 乱数の使用は本質的なのだろうか？ 例えば，最大独立集合問題においては，頂点を一列に並べるために乱数を利用したが,「次数の小さい順に並べる」という並べ方をすると，出力の要素数が大きくなりそうな気もする．このように並べると，都合の悪いことが何か起きるのだろうか？