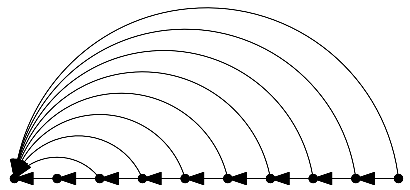
I482F 実践的アルゴリズム特論 第 13 回 **2011 年 7 月 2 日**
乱択アルゴリズム：乱択による高速化 **岡本 吉央**

演習問題 1. 次のような前進問題の変種を考える．考える有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \ldots, n\}$ であり，頂点 1 以外の頂点 i から出る辺は頂点 $i-1$ と頂点 1 へ向かうものしか存在しない．このグラフにおいて，頂点 n から始めて，辺をたどることで頂点 1 に到達したい．下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している．



乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び，移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考える．

1. このアルゴリズムがたどる辺の数を R_n とする．この確率変数 R_n の期待値を計算せよ．
2. 確率変数 2^{R_n} の期待値を計算せよ．

演習問題 2. 与えられた n 個の異なる実数 $a_1, \ldots, a_n$ の中から最も大きな数を見つける問題に対して，次のような乱択アルゴリズムを考える．

1. $A \leftarrow \{a_1, \ldots, a_n\}$ とする．
2. A から数を 1 つ一様分布に従って選択する．選択された数を b とする．
3. $A \leftarrow \{A$ の要素である数で，b よりも大きなもの全体 $\}$ とする．これは b と $A \setminus \{b\}$ の数を 1 つずつ比較することで得られる．比較回数は $|A| - 1$ である．
4. $A = \emptyset$ ならば，b を出力して停止．そうでなければ，Step 2 へ戻る．

以下の問いに答えよ．

1. 上のアルゴリズムは必ず停止し，停止したときに入力 $a_1, \ldots, a_n$ の中の最も大きな数が必ず見つかることを証明せよ．(ヒント：常に，A の中に「$a_1, \ldots, a_n$ の中の最も大きな数」が存在すること，そして，A が Step 3 で更新される度に，必ず A の要素数が小さくなることを証明して，利用せよ．)
2. 上のアルゴリズムが，停止するまでに Step 3 で実行する比較の総数を C_n とする．この確率変数 C_n の期待値を計算せよ．
3. 上記の確率変数 C_n に対して，2^{C_n} の期待値を計算せよ．

観念的演習問題 3. 講義では，アルゴリズムが停止するまでの時間 R_n が長くなる確率が小さくなることを証明するために，その時間に対して Markov の不等式を適用する場合と，その時間の指数関数に対して Markov の不等式を適用する場合を比較して，後者が与える (確率の小ささを表す) 上界の方が前者のものよりも優れていることを見た．なぜ，指数関数を考えるだけでこのようによい上界が得られてしまうのだろうか？ 例えば，確率変数 R_n に対して 2^{R_n} ではなくて，$2^{2^{R_n}}$ を考えると，もっとよい上界が得られるのだろうか？ そうでないとすると，何が障害になるのだろうか？