I482F 実践的アルゴリズム特論 第 12 回 **2011 年 6 月 25 日**
厳密アルゴリズム：前処理による問題の縮小 **岡本 吉央**

演習問題 1. 頂点被覆問題を考える．入力として無向グラフ G と自然数 k の対 $\langle G, k\rangle$ が与えられる．

1. グラフ G に次数 1 の頂点 v が存在すると仮定し，v の隣接頂点を u とする．このとき，G に要素数 k の頂点被覆が存在するための必要十分条件は $G-u$ に要素数 $k-1$ の頂点被覆が存在することである．これを証明せよ．

2. 前問より，頂点被覆問題に対する次のような前処理規則を考えることができる．

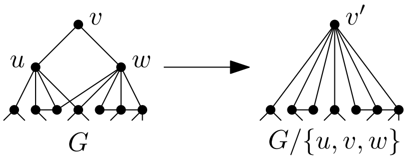
   規則 3：G に次数 1 の頂点 v が存在するとき，$\langle G, k\rangle$ を $\langle G-u, k-1\rangle$ に置き換える．ただし，u は G における v の隣接頂点である．

   規則 1，2，3 の適用ができない入力 $\langle G, k\rangle$ を考える．このとき，$\langle G, k\rangle$ に対する出力が Yes であるならば，G の頂点数は k^2 以下であることを証明せよ．

演習問題 2. 頂点被覆問題を考える．入力として無向グラフ G と自然数 k の対 $\langle G, k\rangle$ が与えられる．

1. グラフ G に次数 2 の頂点 v が存在すると仮定し，v の隣接頂点を u, w とする．グラフ G において u, w が隣接するとき，G に要素数 k の頂点被覆が存在するための必要十分条件は $G-\{u, w\}$ に要素数 $k-2$ の頂点被覆が存在することである．これを証明せよ．

2. グラフ G に次数 2 の頂点 v が存在すると仮定し，v の隣接頂点を u, w とする．グラフ G において u, w が隣接しないとき，G に要素数 k の頂点被覆が存在するための必要十分条件は $G/\{v, u, w\}$ に要素数 $k-1$ の頂点被覆が存在することである．これを証明せよ．ただし，$G/\{v, u, w\}$ とは G の 3 頂点 v, u, w を同一視することで得られるグラフである．すなわち，$G/\{v, u, w\}$ から頂点 v, u, w を取り除き，新たに頂点 v' を追加する．そして，$G/\{v, u, w\}$ において v' と隣接する頂点は G において u または w と隣接する (v 以外の) 頂点とするのである．



演習問題 3. ランキング構成問題を考える．入力として完全有向グラフ G と自然数 k の対 $\langle G, k\rangle$ が与えられる．

講義で与えた前処理のための規則 1 と規則 2 を考える．講義では，規則 1 と規則 2 の適用ができなくなった入力 $\langle G, k\rangle$ において，G の頂点数が $3k^2$ よりも大きいとき，出力は No でなければならないことを証明した．ここで，規則は変えずに，証明を変えることで，「G の頂点数が $k(k+2)$ よりも大きいとき，出力は No でなければならない」ということを証明せよ．(ヒント：規則 2 が適用できないので，1 つの逆向き辺を含む有向三角形の数は k 以下になる．このとき，この逆向き辺を含む有向三角形全体の頂点数は $k+2$ 以下である．これを証明して，利用してみよ．)

観念的演習問題 4. 講義で考えた前処理法では，前処理を適用する前の入力に対する Yes/No の出力と前処理を適用した後の入力に対する Yes/No の出力が合致しており，それが重要な点であった．もし，この合致がない場合，何が起こるのだろうか？ 合致がなくても，アルゴリズム設計において何か有用な性質を保証する (証明する) ことはできるのだろうか？ そのような性質としてどのようなものが考えられるだろうか？