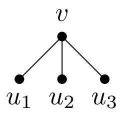
I482F 実践的アルゴリズム特論 第 11 回 **2011 年 6 月 25 日**
厳密アルゴリズム：分枝限定法 **岡本 吉央**

演習問題 1. 頂点被覆問題を考える．

1. 入力として与えられる無向グラフにおいて，すべての頂点の次数が 2 以下であるとする．そのとき，頂点被覆問題を多項式時間で解くアルゴリズムを与えよ．(なぜ，多項式時間で解けるのかも説明せよ．) (ヒント：すべての頂点の次数が 2 以下である無向グラフにおいて，各連結成分はどのようなグラフになっているのか，考えてみよ．)

2. 頂点被覆問題に対する分枝限定アルゴリズムとして，下図の部分構造に着目するものを考える．



すなわち，この部分構造がグラフ G に存在するとき，G の頂点被覆は v を含むか，あるいは $\{u_1, u_2, u_3\}$ の 3 頂点を含まなければならない (両者とも成立することもありうる)．このことから，G に頂点数 k の頂点被覆が存在するための必要十分条件は，$G - v$ に頂点数 $k - 1$ の頂点被覆が存在するか，あるいは，$G - \{u_1, u_2, u_3\}$ に頂点数 $k - 3$ の頂点被覆が存在することであることが分かる．

以上の観察に基づいて，次のような頂点被覆問題に対する分枝限定アルゴリズムの実行 BB3(G, k) を考える．

Step 1: G に辺が存在しないとき，Yes を出力して停止.

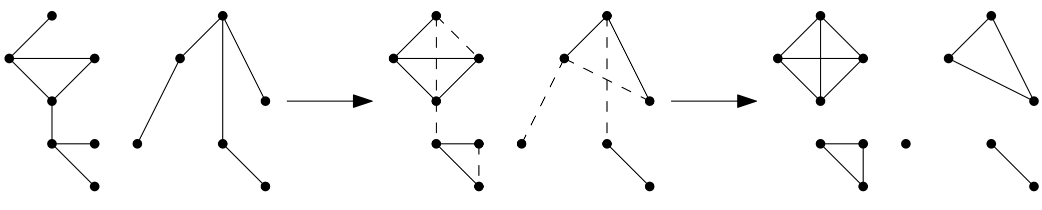
Step 2: G に辺が存在し，$k \leq 0$ のとき，No を出力して停止.

Step 3: G のすべての頂点の次数が 2 以下であるとき，前問の多項式時間アルゴリズムを用いて解き，その出力をそのままアルゴリズムの出力として停止.

Step 4: この段階に到達したとき，G に辺が存在し，ある頂点の次数は 3 以上である．すなわち，上の図のような構造が G に存在する．それを 1 つ見つける．そして，BB3$(G - v, k - 1)$ か BB3$(G - \{u_1, u_2, u_3\}, k - 3)$ のいずれかが Yes を出力するとき，Yes を出力して停止．そうでないとき，No を出力して停止.

この分枝限定アルゴリズムの計算木の葉数が $O(1.466^k)$ になることを証明せよ．ただし，方程式 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ の唯一の正実数解は (小数点以下第 4 位を切り上げると) 1.466 である，という事実を用いてもよい．

演習問題 2. クラスタ編集問題 (cluster editing problem) とは次の問題である．入力は無向グラフ $G = (V, E)$ と自然数 k である．目的は G に k 個以下の辺の追加および削除を行うことで，G を互いに素な完全グラフ (すなわち，各連結成分が完全グラフであるグラフ) に変換することである．出力は，目的が達成できるときには Yes，そうでないときには No である．下の図は，左の入力が与えられたときに，中央の破線で表される辺の追加と削除を行うことで右のグラフが得られ，そこでは各連結成分が完全グラフになっている様子を表している．



以下の問いに答えよ．

1. 無向グラフの各連結成分が完全グラフであるための必要十分条件は，グラフの任意の 3 頂点間に存在する辺の数が 0，1，3 のいずれかである (すなわち，2 ではない）ことである．これを証明せよ．
2. 前問を踏まえて，葉数が $O(3^k)$ となるような計算木を持つ分枝限定アルゴリズムを設計せよ．(葉数が $O(3^k)$ となることも説明せよ．)

観念的演習問題 3. 講義では，頂点被覆問題に対する分枝限定法として辺に着目する方法と長さ 2 のパスに着目する方法を取り扱い，長さ 2 のパスに着目する方法で，計算量の改善が見られた．このように，グラフの中のより大きな部分構造に着目することで更に計算量を改善することは可能なのだろうか？ 改善が可能であるとして，そこには限界があるのだろうか？ 大きな部分構造に着目する際に，留意すべき事項は何だろうか？