

演習問題 1. 次のような重み付き最大カット問題を考える．入力は無向グラフ $G = (V, E)$ と各辺 e に対する非負重み $w(e) \geq 0$ である．出力は G の頂点全体に対する赤と青の色割当である (これが彩色になっている必要はない)．目的は、両端点異なる色で塗られている辺の重み和の最大化である．

講義で紹介した局所探索法をもとにして、近似比が 2 となるアルゴリズムを設計せよ．(近似比が 2 となることの証明も述べよ．)

演習問題 2. 最大カット問題は 2 つの色で頂点を塗ったが、3 色で頂点を塗る変種を考える．つまり、入力は無向グラフ $G = (V, E)$ で、出力は G の頂点全体に対する赤、青、緑の色割当である (これが彩色になっている必要はない)．目的は両端点異なる色で塗られている辺の数の最大化である．

この問題に対して、「頂点を 1 つ選び、その頂点の色を変更する」という操作により解の改善を繰り返す局所探索法を考える．

1. この局所探索法が最適解を出力しない例を構成せよ．(なぜ最適解を出力しないのかも説明せよ．)
2. この局所探索法の近似比が $3/2$ 以下であることを証明せよ．

演習問題 3. 同一機械並列スケジューリング問題 (第 9 回の講義参照) に対して、1 つの解から別の解を得る次の操作を考える．すなわち、「ジョブを 1 つ選び、そのジョブを割り当てる機械を変更する」という操作である (移動操作と呼ばれる)．

この操作により解の改善を繰り返す局所探索法を考える．機械の数が 2 であるとき、この局所探索法を与える解の最終完了時刻が最適最終完了時刻の $4/3$ 倍以上になる例を構成せよ．(なぜそのような性質を満たすのかも説明せよ．) (ヒント：4 つ以上のジョブを考える必要があるかもしれない．)

観念的演習問題 4. 講義で扱った局所探索法では、最大化すべき値 (あるいは最小化すべき値) が常に改善するような移動を繰り返した．では、そうではなく、改善しないような移動も許す局所探索法を考えるとどうなるのだろうか？ そのような考えは妥当なのだろうか？ 妥当であるとすれば、それに基づくアルゴリズムを設計する上で留意すべき事項は何だろうか？