I482F 実践的アルゴリズム特論 第 9 回 **2011 年 6 月 18 日**
近似アルゴリズム：貪欲法 **岡本 吉央**

演習問題 1. 巡回セールスマン問題に対して，次のような「けちけち法」を考える．入力は完全グラフ $G=(V,E)$ と各辺 $e \in E$ に対する費用 $c(e) \geq 0$ である (非負なので 0 でもよい).

Step 1. $T \leftarrow E$ とする (T が最終的に出力する巡回路となる．)

Step 2. T が巡回路であれば，T を出力して停止．そうでなければ，Step 3 へ進む.

Step 3. T の辺 e で，$T \setminus \{e\}$ に巡回路が含まれるものの中から，辺費用 $c(e)$ が最も大きいものを選ぶ．(同点の解決は任意に行う．すなわち，辺費用が最も大きい辺が複数存在する場合は，その中のどれを選んでもよい．)

Step 4. $T \leftarrow T \setminus \{e\}$ とし，Step 2 に戻る.

以下の問いに答えよ.

1. 上記のけちけち法が必ず停止し，停止したときに出力される T が入力 G の巡回路になっていることを証明せよ．（ヒント：停止性を証明するためには，アルゴリズムの実行過程で何かが単調減少することに着目してみよ．）
2. 上記のけちけち法は必ずしも最適解を出力するとは限らない．ある頂点数の完全グラフ G とその上の非負辺重み関数で，それを入力としたときにけちけち法が最適解を出力しないものを構成せよ．(なぜ最適解を出力しないのかも説明せよ．) (ヒント：頂点数 5 以上の完全グラフを考える必要があるかもしれない．)
3. 上記のけちけち法の近似比は 2 より小さくはない．ある頂点数の完全グラフ G とその上の非負辺重み関数で，無向グラフ G で，それを入力としたときにけちけち法の出力する巡回路の重みが最小重み巡回路の重みの 2 倍以上になるものを構成せよ．(なぜそのような性質を満たすのかも説明せよ．)

注：上記のけちけち法は多項式時間アルゴリズムではない．より正確に言うと，Step 3 における「$T \setminus \{e\}$ に巡回路が含まれる」ことの判定を多項式時間でどのように行ったらよいのか知られていない.

演習問題 2. 講義で扱った同一機械並列スケジューリング問題を考える.

1. 機械数 m が 3 の場合に，貪欲アルゴリズムの出力するスケジュールの最終完了時刻が最適スケジュールの最終完了時刻の 5/3 倍以上になるような問題例を構成せよ．(なぜそのような性質を満たすのかも説明せよ．)
2. 貪欲アルゴリズムではジョブを任意の順序で見ていった．その代わりに，処理時間の大きなジョブから順に見ていくという順序を用いて貪欲アルゴリズムを実行することを考える．このように貪欲アルゴリズムを変更した場合，機械数 m が 2 のときに，アルゴリズムの出力するスケジュールの最終完了時刻が最適スケジュールの最終完了時刻の 7/6 倍以上になるような問題例を構成せよ．(なぜそのような性質を満たすのかも説明せよ．)

観念的演習問題 3. 講義では，近似アルゴリズムの性能を「近似比」で定量化した．これは妥当だろうか？例えば，アルゴリズムの出力値と最適値の差で近似アルゴリズムの性能を定量化することは悪い考えなのだろうか？ 近似アルゴリズムの性能の定量化として，他のものは考えられないのだろうか？