I482F 実践的アルゴリズム特論 第 8 回 **2011 年 6 月 11 日**
困難な問題に対処するアルゴリズム設計 **岡本 吉央**

演習問題 1. 円グラフとは，平面上に与えられた (半径が同じであるとは限らない) 円の集合に対して，1 つ 1 つの円を頂点に対応させて，交わる 2 つの円と重なる 2 つの円を辺に対応させることででき上がる無向グラフである．

円グラフに対する彩色問題を考える．貪欲アルゴリズムを適用する頂点上の順序をうまく設定することで，貪欲アルゴリズムの出力する色数 ALG と最小の色数 OPT の間に

$$\mathrm{ALG} \leq 6 \cdot \mathrm{OPT} - 5$$

が成り立つことを証明せよ．

演習問題 2. 単位円グラフに対する彩色問題を考える．貪欲アルゴリズムを適用する頂点上の順序を「円 (の中心) が平面上に置かれている位置で，左から右に順に見ていくもの」と設定する．このとき，貪欲アルゴリズムの出力する色数 ALG と最小の色数 OPT の間に

$$\mathrm{ALG} \leq 3 \cdot \mathrm{OPT} - 2$$

が成り立つことを証明したい．次の流れに沿って証明を完成させよ．

1. 頂点 v に対して，頂点 v に隣接する頂点 u で，u に対応する円が v に対応する円よりも左側にあるものの数を $\delta(v)$ で表すとする．このとき，貪欲アルゴリズムが頂点 v に与える色は $\delta(v) + 1$ 以下であることを証明せよ．
2. 上の小問より，$\mathrm{ALG} \leq \max\{\delta(v) \mid v$ はグラフの頂点 $\} + 1$ が成り立つことを証明せよ．
3. $\mathrm{OPT} \geq \frac{1}{3} \max\{\delta(v) \mid v$ はグラフの頂点 $\} + 1$ が成り立つことを証明せよ．
4. 以上より，$\mathrm{ALG} \leq 3 \cdot \mathrm{OPT} - 2$ が成り立つことを証明せよ．

演習問題 3. 彩色問題に対して次の事項を証明せよ.「任意の無向グラフ G に対して，その頂点上のある順序が存在して，その順序に対して貪欲アルゴリズムを適用すると色数最小の彩色が得られる.」(ヒント：色数最小の彩色が与えられたとして，その彩色からうまい順序を構成してみよ．)

観念的演習問題 4. 講義では，現実世界のいくつかの問題が彩色問題としてモデル化されるとしたが，現実世界の問題はもっと複雑であり，単に彩色問題としてモデル化されるとすることは現実を直視していないという意見もありうる．もしそうであるとしたら，彩色問題を研究する意義があるのだろうか？ あるいは，もしそうであるとしても，彩色問題を研究する意義があるとすれば，どういう意義に沿うものなのだろうか？