

I482F 実践的アルゴリズム特論 試験問題 (岡本担当分)

問題 4, 5, 6 の中から 2 問を選択して解答すること
選択しなかった問題用紙には大きく X 印をつけること

問題 4

氏名 : _____ 学生番号 : _____

同一機械並列スケジューリング問題とは次のような問題である．入力は m 個の同一な機械， n 個のジョブ，そして，各ジョブを機械で処理するための (正実数で表される) 時間である．出力は機械へのジョブの割当であり，目的はジョブ処理がすべて完了するまでの時間 (最終完了時刻) の最小化である．

同一機械並列スケジューリング問題に対する貪欲アルゴリズムでは，ジョブを添字に順に見ていき，各ジョブを割り当てる機械を決定するが，このとき，その時点までに割り当てられたジョブ全部の完了時刻が最も小さい機械に割り当てる，とする．

1. 機械数 m が 3 の場合に，貪欲アルゴリズムの出力するスケジュールの最終完了時刻が最適スケジュールの最終完了時刻の $5/3$ 倍以上になるような問題例を構成せよ．(なぜそのような性質を満たすのかも説明せよ．)
2. 貪欲アルゴリズムではジョブを添字の順序で見えていった．その代わりに，処理時間の大きなジョブから順に見ていくという順序を用いて貪欲アルゴリズムを実行することを考える．このように貪欲アルゴリズムを変更した場合，機械数 m が 2 のときに，アルゴリズムの出力するスケジュールの最終完了時刻が最適スケジュールの最終完了時刻の $7/6$ 倍以上になるような問題例を構成せよ．(なぜそのような性質を満たすのかも説明せよ．)

問題 5

氏名： _____ 学生番号： _____

頂点被覆問題とは次のような問題である．入力は無向グラフ $G = (V, E)$ と自然数 k である．出力は G が要素数 k 以下の頂点被覆を持てば「Yes」, そうでなければ「No」である．ただし, G の頂点被覆とは, G の頂点部分集合 S で, どの辺の端点も 1 つは S に含まれるもののことである．

グラフ G に次数 2 の頂点 v が存在すると仮定し, v の隣接頂点を u, w とする．グラフ G において u, w が隣接するとき, G に要素数 k の頂点被覆が存在するための必要十分条件は $G - \{u, w\}$ に要素数 $k - 2$ の頂点被覆が存在することである．これを証明せよ．

問題 6

氏名： _____ 学生番号： _____

次のような重み付き最大カット問題を考える．入力は無向グラフ $G = (V, E)$ と各辺 e に対する非負重み $w(e) \geq 0$ である．出力は G の頂点全体に対する赤と青の色割当である（これが彩色になっている必要はない）．目的は，両端点異なる色で塗られている辺の重み和の最大化である．

この問題に対して，「各頂点に対して一様分布に従って独立に赤か青を割り当てる」というアルゴリズムを考える．このアルゴリズムによって得られた色割当において，両端点異なる色で塗られている辺の重み和の期待値は，すべての辺の重み和の $\frac{1}{2}$ である．これを証明せよ．