I482F 実践的アルゴリズム特論 試験問題 (岡本担当分)
問題 4，5，6 の中から 2 問を選択して解答すること
選択しなかった問題用紙には大きく X 印をつけること

問題 4

氏名：______________________ 学生番号：______________________

同一機械並列スケジューリング問題とは次のような問題である．入力は m 個の同一な機械，n 個のジョブ，そして，各ジョブを機械で処理するための (正実数で表される) 時間である．出力は機械へのジョブの割当であり，目的はジョブ処理がすべて完了するまでの時間 (最終完了時刻) の最小化である．

同一機械並列スケジューリング問題に対して，1 つの解から別の解を得る次の操作を考える．すなわち，「ジョブを 1 つ選び，そのジョブを割り当てる機械を変更する」という操作である．

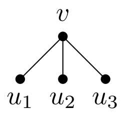
この操作により解の改善を繰り返す局所探索法を考える．機械の数が 2 であるとき，この局所探索法の与える解の最終完了時刻が最適最終完了時刻の 4/3 倍以上になる例を構成せよ．(なぜそのような性質を満たすのかも説明せよ．) (ヒント：4 つ以上のジョブを考える必要があるかもしれない．)

問題 5

氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 学生番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

頂点被覆問題とは次のような問題である．入力は無向グラフ $G = (V, E)$ と自然数 k である．出力は G が要素数 k 以下の頂点被覆を持てば「Yes」，そうでなければ「No」である．ただし，G の頂点被覆とは，G の頂点部分集合 S で，どの辺の端点も 1 つは S に含まれるもののことである．

頂点被覆問題に対する分枝限定アルゴリズムとして，下図の部分構造に着目するものを考える．



すなわち，この部分構造がグラフ G に存在するとき，G の頂点被覆は v を含むか，あるいは $\{u_1, u_2, u_3\}$ の 3 頂点を含まなければならない (両者とも成立することもありうる)．このことから，G に頂点数 k の頂点被覆が存在するための必要十分条件は，$G - v$ に頂点数 $k - 1$ の頂点被覆が存在するか，あるいは，$G - \{u_1, u_2, u_3\}$ に頂点数 $k - 3$ の頂点被覆が存在することであることが分かる．

以上の観察に基づいて，次のような頂点被覆問題に対する分枝限定アルゴリズムの実行 BB3(G, k) を考える．

Step 1: G に辺が存在しないとき，Yes を出力して停止．

Step 2: G に辺が存在し，$k \leq 0$ のとき，No を出力して停止．

Step 3: G のすべての頂点の次数が 2 以下であるとき，頂点被覆問題を多項式時間で解くアルゴリズムが知られているので (これが既知であることは仮定してよい)，それを用いて解き，その出力をそのままアルゴリズムの出力として停止．

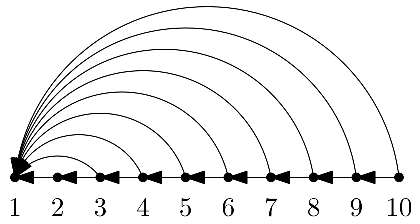
Step 4: この段階に到達したとき，G に辺が存在し，ある頂点の次数は 3 以上である．すなわち，上の図のような構造が G に存在する．それを 1 つ見つける．そして，BB3$(G - v, k - 1)$ か BB3$(G - \{u_1, u_2, u_3\}, k - 3)$ のいずれかが Yes を出力するとき，Yes を出力して停止．そうでないとき，No を出力して停止．

この分枝限定アルゴリズムの計算木の葉数が $O(1.466^k)$ になることを証明せよ．ただし，方程式 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ の唯一の正実数解は (小数点以下第 4 位を切り上げると) 1.466 である，という事実を用いてもよい．

問題 6

氏名：________________________ 学生番号：________________________

次のような前進問題の変種を考える．考える有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \ldots, n\}$ であり，頂点 1 以外の頂点 i から出る辺は頂点 $i-1$ と頂点 1 へ向かうものしか存在しない．このグラフにおいて，頂点 n から始めて，辺をたどることで頂点 1 に到達したい．下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している．



乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び，移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考える．

1. このアルゴリズムがたどる辺の数を R_n とする．この確率変数 R_n の期待値を計算せよ．
2. 確率変数 2^{R_n} の期待値を計算せよ．