情報基礎数理学特選
有限距離空間の離散幾何学とアルゴリズム
(8) 低歪み埋め込み可能性：Bourgain の埋め込みと弱い下界

岡本 吉央

北陸先端科学技術大学院大学

2011 年 1 月 13 日

"最終更新：2011/01/12 23:18"

1. Bourgain の定理
2. Bourgain の定理の証明：埋め込みの構成
3. Bourgain の定理の証明：歪みの上界
4. Bourgain の定理：補足
5. 弱い下界

ℓ_2 への低歪み埋め込み

定理 7.3 (再掲)

n 点から成る距離空間で，ℓ_2 への埋め込みの歪みを

$$c \log n / \log \log n$$

より小さくできないものが存在する (ただし，c は正定数)

この講義では上界を示す

定理 8.1 (Bourgain '85)

n 点から成る距離空間はどれも，ℓ_2 へ $O(\log n)$-埋め込み可能

1. Bourgain の定理
2. Bourgain の定理の証明：埋め込みの構成
3. Bourgain の定理の証明：歪みの上界
4. Bourgain の定理：補足
5. 弱い下界

低歪み埋め込みの構成

(X, μ) : n 点から成る距離空間，$q = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

構成法

- 集合 $A \subseteq X$ を次のようにランダムに構成
  - 各 $j \in \{1, \ldots, q\}$ に対して，$A_j \subseteq X$ を X の各点を確率 $1/2^j$ で独立に選択することにより構成

低歪み埋め込みの構成

(X, μ)：n 点から成る距離空間，$q = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

構成法

- 集合 $A \subseteq X$ を次のようにランダムに構成
  - 各 $j \in \{1, \ldots, q\}$ に対して，$A_j \subseteq X$ を X の各点を確率 $1/2^j$ で独立に選択することにより構成
  - $j \in \{1, \ldots, q\}$ を一様分布に従って選択

低歪み埋め込みの構成

(X, μ)：n 点から成る距離空間，$q = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

構成法

- 集合 $A \subseteq X$ を次のようにランダムに構成
  - 各 $j \in \{1, \ldots, q\}$ に対して，$A_j \subseteq X$ を X の各点を確率 $1/2^j$ で独立に選択することにより構成
  - $j \in \{1, \ldots, q\}$ を一様分布に従って選択
  - $A = A_j$ とする

低歪み埋め込みの構成

(X, μ)：n 点から成る距離空間，$q = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

構成法

- 集合 $A \subseteq X$ を次のようにランダムに構成
  - 各 $j \in \{1, \ldots, q\}$ に対して，$A_j \subseteq X$ を X の各点を確率 $1/2^j$ で独立に選択することにより構成
  - $j \in \{1, \ldots, q\}$ を一様分布に従って選択
  - $A = A_j$ とする
- 埋め込み $f \colon X \to \ell_2^{2^n}$ を次で定義：各 $x \in X$ と $S \subseteq X$ に対して

$$f(x)_S = \sqrt{\Pr[S = A]}\ \mu(x, S)$$

記法

$\mu(x, S) = \min\{\mu(x, y) \mid y \in S\}$ (ただし，$x \in X, S \subseteq X$)

構成した埋め込みの性質：距離は大きくならない

(X, μ)：n 点から成る距離空間，$q = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

主張 1

構成した埋め込み f は，任意の $x, y \in X$ に対して

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \mu(x, y)$$

を満たす．

証明：演習問題

1. Bourgain の定理
2. Bourgain の定理の証明：埋め込みの構成
3. Bourgain の定理の証明：歪みの上界
4. Bourgain の定理：補足
5. 弱い下界

構成した埋め込みの性質：距離は対数的にしか小さくならない

(X, μ)：n 点から成る距離空間，$q = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

主張 2

構成した埋め込み f は，任意の $x, y \in X$ に対して

$$\mu(x, y) \leq 32q\|f(x) - f(y)\|_2$$

を満たす

構成した埋め込みの性質：距離は対数的にしか小さくならない

(X, μ)：n 点から成る距離空間，$q = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

主張 2

構成した埋め込み f は，任意の $x, y \in X$ に対して

$$\mu(x, y) \leq 32q \| f(x) - f(y) \|_2$$

を満たす

注

「$32q$」という定数は厳密な形が重要なのではなく，
この部分が $O(\log n)$ であることのみが重要

構成した埋め込みの性質：距離は対数的にしか小さくならない

(X, μ)：n 点から成る距離空間，$q = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

主張 2

構成した埋め込み f は，任意の $x, y \in X$ に対して

$$\mu(x, y) \leq 32q\|f(x) - f(y)\|_2$$

を満たす

注

「$32q$」という定数は厳密な形が重要なのではなく，
この部分が $O(\log n)$ であることのみが重要

証明：

- まず，計算から始める

ちょっと計算

記法

$p_S = \Pr[S = A]$

$\|f(x) - f(y)\|_2$

ちょっと計算

記法

$p_S = \Pr[S = A]$

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \quad = \quad \sqrt{\sum_{S \subseteq X} |f(x)_S - f(y)_S|^2}$$

ちょっと計算

記法

$p_S = \Pr[S = A]$

$$
\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\|_2 &= \sqrt{\sum_{S \subseteq X} |f(x)_S - f(y)_S|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{S \subseteq X} |\sqrt{p_S}\mu(x, S) - \sqrt{p_S}\mu(y, S)|^2}
\end{aligned}
$$

ちょっと計算

記法

$p_S = \Pr[S = A]$

$$
\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\|_2 &= \sqrt{\sum_{S \subseteq X} |f(x)_S - f(y)_S|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{S \subseteq X} |\sqrt{p_S}\mu(x, S) - \sqrt{p_S}\mu(y, S)|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x, S) - \mu(y, S)|^2}
\end{aligned}
$$

ちょっと計算

記法

$p_S = \Pr[S = A]$

$$
\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\|_2 &= \sqrt{\sum_{S\subseteq X} |f(x)_S - f(y)_S|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{S\subseteq X} |\sqrt{p_S}\mu(x,S) - \sqrt{p_S}\mu(y,S)|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{S\subseteq X} p_S|\mu(x,S) - \mu(y,S)|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{S\subseteq X} p_S|\mu(x,S) - \mu(y,S)|^2}\sqrt{\sum_{S\subseteq X} p_S}
\end{aligned}
$$

ちょっと計算

記法

$p_S = \Pr[S = A]$

$$
\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\|_2 &= \sqrt{\sum_{S \subseteq X} |f(x)_S - f(y)_S|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{S \subseteq X} |\sqrt{p_S}\mu(x,S) - \sqrt{p_S}\mu(y,S)|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)|^2}\sqrt{\sum_{S \subseteq X} p_S} \\
&\geq \sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)| \qquad \text{(Cauchy–Schwarz)}
\end{aligned}
$$

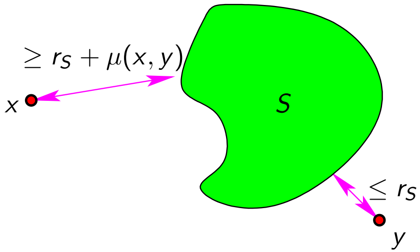
主張の修正

主張 2'

$$\sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)| \geq \frac{\mu(x,y)}{32q}$$

証明のアイデア：

- 「多く」の集合 $S \subseteq X$ に対して
  ある r_S が存在して，$\mu(x,S) \geq r_S + \mu(x,y)$ と $\mu(y,S) \leq r_S$ を満たす
  ということを証明しようとしてみる



ちょっと考えてみる

次が成り立つと仮定してみる

$\forall\, S \subseteq X \;\exists\, r_S > 0 : \mu(x, S) \geq r_S + \mu(x, y)$ かつ $\mu(y, S) \leq r_S$

ちょっと考えてみる

次が成り立つと仮定してみる

$\forall\, S \subseteq X\ \exists\, r_S > 0 : \mu(x,S) \geq r_S + \mu(x,y)$ かつ $\mu(y,S) \leq r_S$

このとき

$$\sum_{S\subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)| \quad \geq \quad \sum_{S\subseteq X} p_S((r_S + \mu(x,y)) - r_S)$$

ちょっと考えてみる

次が成り立つと仮定してみる

$\forall\, S \subseteq X\ \exists\, r_S > 0 : \mu(x,S) \geq r_S + \mu(x,y)$ かつ $\mu(y,S) \leq r_S$

このとき

$$\begin{aligned}\sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)| &\geq \sum_{S \subseteq X} p_S((r_S + \mu(x,y)) - r_S) \\ &= \sum_{S \subseteq X} p_S \mu(x,y) = \mu(x,y)\end{aligned}$$

ちょっと考えてみる

次が成り立つと仮定してみる

$\forall\, S \subseteq X\ \exists\, r_S > 0 : \mu(x,S) \geq r_S + \mu(x,y)$ かつ $\mu(y,S) \leq r_S$

このとき

$$\begin{aligned}\sum_{S\subseteq X} p_S|\mu(x,S)-\mu(y,S)| &\geq \sum_{S\subseteq X} p_S((r_S+\mu(x,y))-r_S)\\ &= \sum_{S\subseteq X} p_S\mu(x,y) = \mu(x,y)\\ &= \mu(x,y)\sum_{S\subseteq X} p_S\end{aligned}$$

ちょっと考えてみる

次が成り立つと仮定してみる

$\forall\, S \subseteq X\ \exists\, r_S > 0 : \mu(x,S) \geq r_S + \mu(x,y)$ かつ $\mu(y,S) \leq r_S$

このとき

$$\begin{aligned}
\sum_{S\subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)| &\geq \sum_{S\subseteq X} p_S((r_S + \mu(x,y)) - r_S) \\
&= \sum_{S\subseteq X} p_S \mu(x,y) = \mu(x,y) \\
&= \mu(x,y) \sum_{S\subseteq X} p_S = \mu(x,y)
\end{aligned}$$

ちょっと考えてみる

次が成り立つと仮定してみる

$\forall\, S \subseteq X\ \exists\, r_S > 0 : \mu(x, S) \geq r_S + \mu(x, y)$ かつ $\mu(y, S) \leq r_S$

このとき

$$
\begin{aligned}
\sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x, S) - \mu(y, S)| &\geq \sum_{S \subseteq X} p_S((r_S + \mu(x, y)) - r_S) \\
&= \sum_{S \subseteq X} p_S \mu(x, y) = \mu(x, y) \\
&= \mu(x, y) \sum_{S \subseteq X} p_S = \mu(x, y)
\end{aligned}
$$

つまり，f は等長埋め込みになる！

ちょっと考えてみる

次が成り立つと仮定してみる

$\forall\, S \subseteq X\ \exists\, r_S > 0 : \mu(x,S) \geq r_S + \mu(x,y)$ かつ $\mu(y,S) \leq r_S$

このとき

$$\begin{aligned} \sum_{S\subseteq X} p_S|\mu(x,S) - \mu(y,S)| &\geq \sum_{S\subseteq X} p_S((r_S + \mu(x,y)) - r_S) \\ &= \sum_{S\subseteq X} p_S\mu(x,y) = \mu(x,y) \\ &= \mu(x,y)\sum_{S\subseteq X} p_S = \mu(x,y) \end{aligned}$$

つまり，f は等長埋め込みになる！ しかし，

- すべての S がこの条件を満たすわけではない
- でも,「多く」の集合が満たせば，主張は成り立つ

主著の修正

主張 2' (再掲)

$$\sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)| \geq \frac{\mu(x,y)}{32q}$$

主著の修正

主張 2' (再掲)

$$\sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)| \geq \frac{\mu(x,y)}{32q}$$

証明のアイデア：

- 「多く」の集合 $S \subseteq X$ に対して
  ある r_S が存在して，$\mu(x,S) \geq r_S + \mu(x,y)$ と $\mu(y,S) \leq r_S$ を満たす
  ということを証明しようとしてみる

そのために

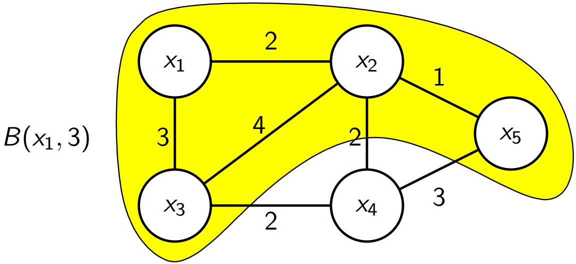
- 数え上げるのではなく，確率を見てみる
- $|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$ を粗視化
- いくつかの S を和から捨てる
- p_S を抑える

球

定義：c を中心とする半径 r の球 (ball)

$c \in X$ と非負実数 r に対して

- $B(c, r) = \{z \in X : \mu(c, z) \leq r\}$ (閉球)
- $B^{\circ}(c, r) = \{z \in X : \mu(c, z) < r\}$ (開球)



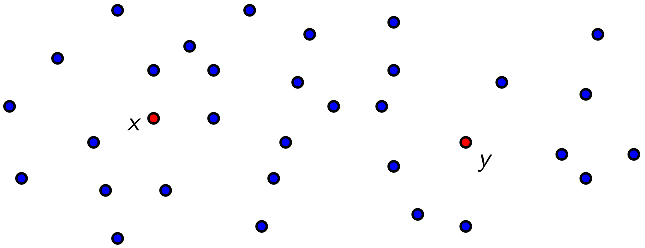
$|\mu(x, S) - \mu(y, S)|$ の粗視化 (1)

$x, y \in X$ ：固定

記法

- 任意の $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$

$$\tilde{r}_j = \min\{r \colon |B(x, r)| \geq 2^j \text{ and } |B(y, r)| \geq 2^j\}$$



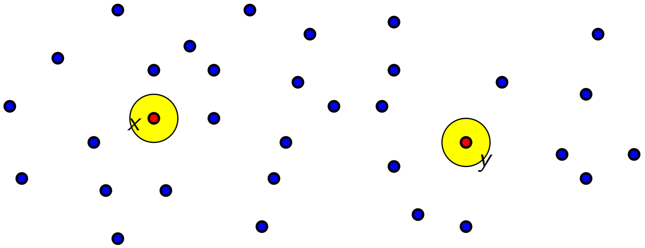
$|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$ の粗視化 (1)

$x, y \in X$: 固定

記法

- 任意の $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$

$$\tilde{r}_j = \min\{r \colon |B(x,r)| \geq 2^j \text{ and } |B(y,r)| \geq 2^j\}$$



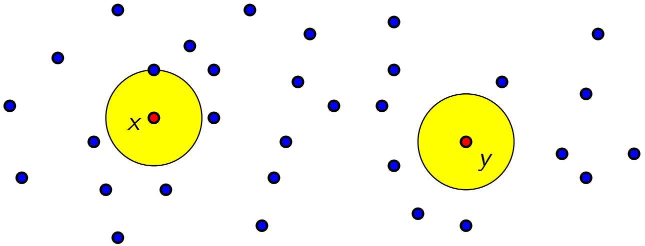
$|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$ の粗視化 (1)

$x, y \in X$: 固定

記法

- 任意の $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$

$$\tilde{r}_j = \min\{r \colon |B(x,r)| \geq 2^j \text{ and } |B(y,r)| \geq 2^j\}$$



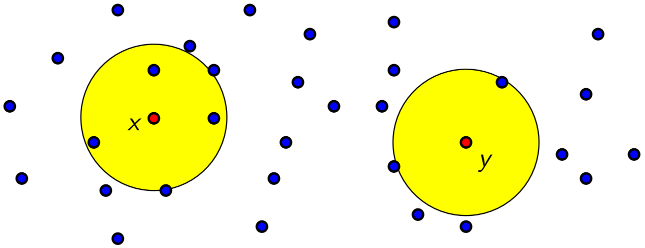
$|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$ の粗視化 (1)

$x, y \in X$: 固定

記法

- 任意の $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$

$$\tilde{r}_j = \min\{r \colon |B(x,r)| \geq 2^j \text{ and } |B(y,r)| \geq 2^j\}$$



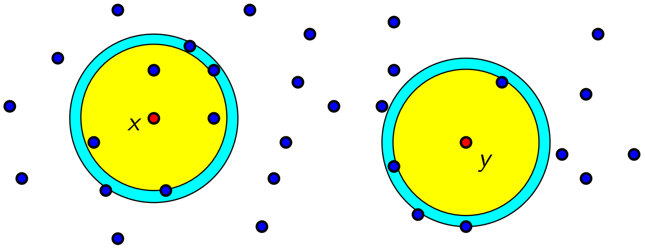
$|\mu(x,S)-\mu(y,S)|$ の粗視化 (1)

$x, y \in X$：固定

記法

- 任意の $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$

$$\tilde{r}_j = \min\{r \colon |B(x,r)| \geq 2^j \text{ and } |B(y,r)| \geq 2^j\}$$



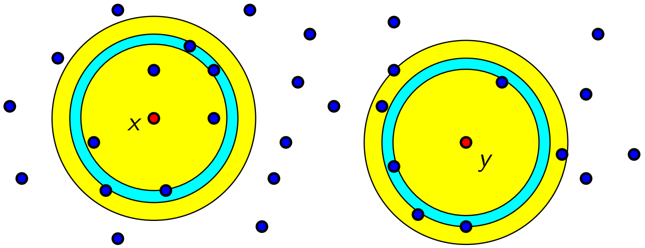
$|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$ の粗視化 (1)

$x, y \in X$：固定

記法

- 任意の $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$

$$\tilde{r}_j = \min\{r \colon |B(x,r)| \geq 2^j \text{ and } |B(y,r)| \geq 2^j\}$$



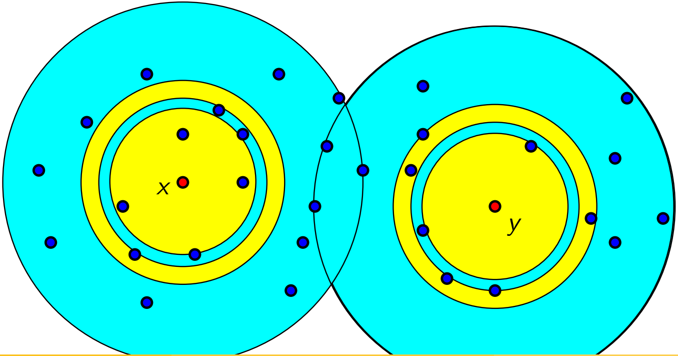
$|\mu(x, S) - \mu(y, S)|$ の粗視化 (1)

$x, y \in X$: 固定

記法

- 任意の $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$

$$\tilde{r}_j = \min\{r \colon |B(x, r)| \geq 2^j \text{ and } |B(y, r)| \geq 2^j\}$$



$|\mu(x,S)-\mu(y,S)|$ の粗視化 (2)

$x, y \in X$: 固定

記法

- 任意の $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$

$$\tilde{r}_j = \min\{r \colon |B(x,r)| \geq 2^j \text{ and } |B(y,r)| \geq 2^j\}$$

$|\mu(x,S)-\mu(y,S)|$ の粗視化 (2)

$x, y \in X$: 固定

記法

- 任意の $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$

$$\tilde{r}_j = \min\{r \colon |B(x,r)| \geq 2^j \text{ and } |B(y,r)| \geq 2^j\}$$

- i : 次を満たす添字

$$\tilde{r}_0 \leq \tilde{r}_1 \leq \cdots \leq \tilde{r}_{i-1} \leq \frac{1}{2}\mu(x,y) \leq \tilde{r}_i \leq \cdots \leq \tilde{r}_q$$

$|\mu(x,S)-\mu(y,S)|$ の粗視化 (2)

$x, y \in X$：固定

記法

- 任意の $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$

$$\tilde{r}_j = \min\{r \colon |B(x,r)| \geq 2^j \text{ and } |B(y,r)| \geq 2^j\}$$

- i：次を満たす添字

$$\tilde{r}_0 \leq \tilde{r}_1 \leq \cdots \leq \tilde{r}_{i-1} \leq \frac{1}{2}\mu(x,y) \leq \tilde{r}_i \leq \cdots \leq \tilde{r}_q$$

- 任意の $j \in \{0, 1, \ldots, i\}$ に対して

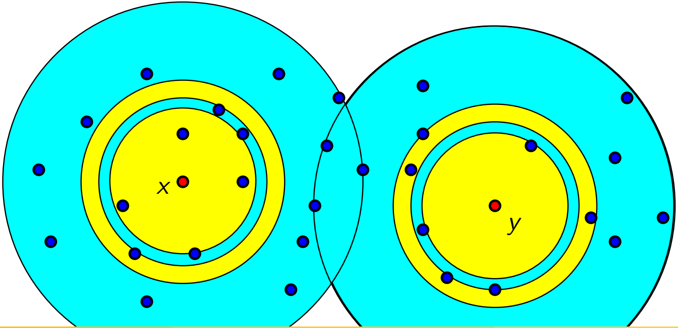
$$r_j = \begin{cases} \tilde{r}_j & (j \in \{0, 1, \ldots, i-1\} \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2}\mu(x,y) & (j = i \text{ のとき}) \end{cases}$$

$|\mu(x,S)-\mu(y,S)|$ の粗視化 (3)

$j \in \{1,\ldots,i\}$：固定

観察

1. $|B^\circ(x,r_j)| < 2^j$ または $|B^\circ(y,r_j)| < 2^j$ （$\because$ r_j の定義）

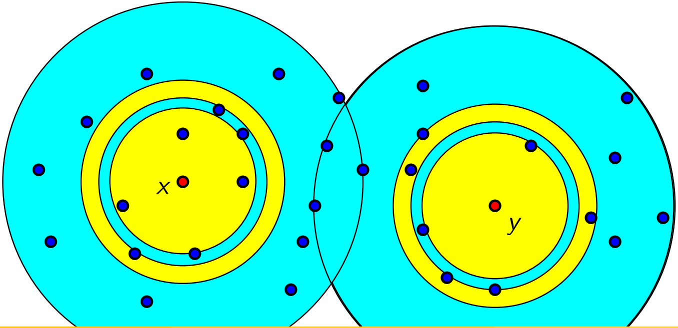


$|\mu(x,S)-\mu(y,S)|$ の粗視化 (3)

$j \in \{1,\dots,i\}$：固定

観察

1. $|B^\circ(x,r_j)| < 2^j$ または $|B^\circ(y,r_j)| < 2^j$ $(\because r_j$ の定義$)$
2. 一般性を失わずに，$|B^\circ(x,r_j)| < 2^j$

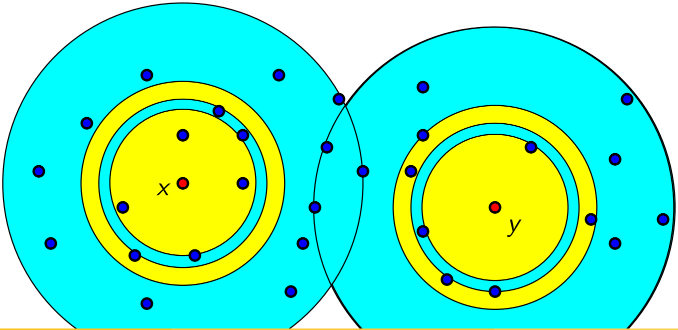


$|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$ の粗視化 (3)

$j \in \{1,\ldots,i\}$：固定

観察

1. $|B^\circ(x,r_j)| < 2^j$ または $|B^\circ(y,r_j)| < 2^j$ $\quad$ ($\because$ r_j の定義)
2. 一般性を失わずに，$|B^\circ(x,r_j)| < 2^j$
3. $|B(y,r_{j-1})| \geq 2^{j-1}$ $\quad$ ($\because$ r_{j-1} の定義)

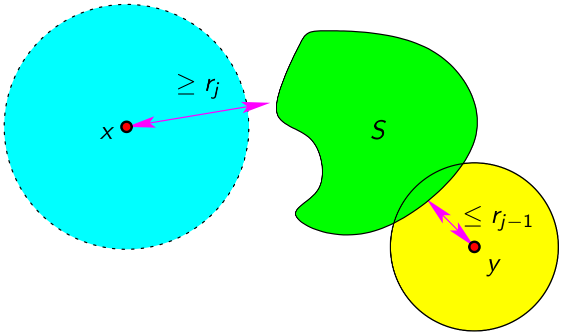


$|\mu(x,S)-\mu(y,S)|$ の粗視化 (4)

$j \in \{1,\ldots,i\}$：固定

重要な観察

$B^\circ(x,r_j) \cap S = \emptyset$ かつ $B(y,r_{j-1}) \cap S \neq \emptyset$
$\Rightarrow |\mu(x,S)-\mu(y,S)| \geq r_j - r_{j-1}$



いくつかの S を和から捨てる (1)

$$\sum_{S \subseteq X} \Pr[S = A] |\mu(x, S) - \mu(y, S)|$$

いくつかの S を和から捨てる (1)

$$\sum_{S \subseteq X} \Pr[S = A] |\mu(x, S) - \mu(y, S)|$$

$$= \sum_{S \subseteq X} \sum_{j=1}^{q} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}] \Pr[j \text{ を選択}] |\mu(x, S) - \mu(y, S)|$$

いくつかの S を和から捨てる (1)

$$\sum_{S\subseteq X} \Pr[S = A]|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$$

$$= \sum_{S\subseteq X}\sum_{j=1}^{q} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]\, \Pr[j \text{ を選択}] |\mu(x,S) - \mu(y,S)|$$

$$= \sum_{S\subseteq X}\sum_{j=1}^{q} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}] \frac{1}{q} |\mu(x,S) - \mu(y,S)|$$

いくつかの S を和から捨てる (1)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{S\subseteq X} \Pr[S = A]|\mu(x,S) - \mu(y,S)| \\
&= \sum_{S\subseteq X}\sum_{j=1}^{q} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}] \Pr[j \text{ を選択}]|\mu(x,S) - \mu(y,S)| \\
&= \sum_{S\subseteq X}\sum_{j=1}^{q} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]\frac{1}{q}|\mu(x,S) - \mu(y,S)| \\
&= \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\sum_{S\subseteq X} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]|\mu(x,S) - \mu(y,S)|
\end{aligned}
$$

いくつかの S を和から捨てる (1)

$$\sum_{S\subseteq X} \Pr[S = A]|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$$

$$= \sum_{S\subseteq X}\sum_{j=1}^{q} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}] \Pr[j \text{ を選択}]|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$$

$$= \sum_{S\subseteq X}\sum_{j=1}^{q} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}] \frac{1}{q}|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\sum_{S\subseteq X} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$$

$$\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}\sum_{S\subseteq X} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$$

いくつかの S を和から捨てる (1)

$$\begin{aligned}
&\sum_{S\subseteq X} \Pr[S = A]|\mu(x, S) - \mu(y, S)| \\
&= \sum_{S\subseteq X}\sum_{j=1}^{q} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}] \Pr[j \text{ を選択}]|\mu(x, S) - \mu(y, S)| \\
&= \sum_{S\subseteq X}\sum_{j=1}^{q} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]\frac{1}{q}|\mu(x, S) - \mu(y, S)| \\
&= \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\sum_{S\subseteq X} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]|\mu(x, S) - \mu(y, S)| \\
&\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}\sum_{S\subseteq X} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]|\mu(x, S) - \mu(y, S)| \\
&\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}\sum_{\substack{S\subseteq X,\\ B^\circ(x,r_j)\cap S=\emptyset,\\ B(y,r_{j-1})\cap S\neq\emptyset}} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]|\mu(x, S) - \mu(y, S)|
\end{aligned}$$

いくつかの S を和から捨てる (2)

$$\sum_{S \subseteq X} \Pr[S = A] |\mu(x, S) - \mu(y, S)|$$

$$\geq \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{S \subseteq X, \\ B^\circ(x, r_j) \cap S = \emptyset, \\ B(y, r_{j-1}) \cap S \neq \emptyset}} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}] |\mu(x, S) - \mu(y, S)|$$

いくつかの S を和から捨てる (2)

$$\sum_{S \subseteq X} \Pr[S = A] |\mu(x, S) - \mu(y, S)|$$

$$\geq \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{S \subseteq X, \\ B^\circ(x, r_j) \cap S = \emptyset, \\ B(y, r_{j-1}) \cap S \neq \emptyset}} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}] |\mu(x, S) - \mu(y, S)|$$

$$\geq \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{S \subseteq X, \\ B^\circ(x, r_j) \cap S = \emptyset, \\ B(y, r_{j-1}) \cap S \neq \emptyset}} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}] (r_j - r_{j-1})$$

いくつかの S を和から捨てる (2)

$$\sum_{S\subseteq X} \Pr[S = A]|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$$

$$\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{S\subseteq X,\\ B^\circ(x,r_j)\cap S=\emptyset,\\ B(y,r_{j-1})\cap S\neq\emptyset}} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]|\mu(x,S) - \mu(y,S)|$$

$$\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{S\subseteq X,\\ B^\circ(x,r_j)\cap S=\emptyset,\\ B(y,r_{j-1})\cap S\neq\emptyset}} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}](r_j - r_{j-1})$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i} (r_j - r_{j-1}) \underbrace{\sum_{\substack{S\subseteq X,\\ B^\circ(x,r_j)\cap S=\emptyset,\\ B(y,r_{j-1})\cap S\neq\emptyset}} \Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]}_{\text{これを評価する}}$$

確率を抑える (1)

$$\sum_{\substack{S \subseteq X, \\ B^\circ(x, r_j) \cap S = \emptyset, \\ B(y, r_{j-1}) \cap S \neq \emptyset}} \underbrace{\Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]}_{= \Pr[S = A_j]}$$

確率を抑える (1)

$$\sum_{\substack{S \subseteq X, \\ B^\circ(x,r_j)\cap S=\emptyset, \\ B(y,r_{j-1})\cap S\neq\emptyset}} \underbrace{\Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]}_{=\Pr[S=A_j]}$$

$$= \Pr[B^\circ(x,r_j) \cap A_j = \emptyset \text{ かつ } B(y,r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset]$$

確率を抑える (1)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{S \subseteq X,\\ B^\circ(x,r_j)\cap S=\emptyset,\\ B(y,r_{j-1})\cap S\neq\emptyset}} \underbrace{\Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]}_{=\Pr[S=A_j]}\\
&= \Pr[B^\circ(x,r_j)\cap A_j = \emptyset \text{ かつ } B(y,r_{j-1})\cap A_j \neq \emptyset]\\
&= \Pr[B^\circ(x,r_j)\cap A_j = \emptyset]\cdot\Pr[B(y,r_{j-1})\cap A_j \neq \emptyset]
\end{aligned}
$$

確率を抑える (1)

$$\sum_{\substack{S \subseteq X, \\ B^\circ(x, r_j) \cap S = \emptyset, \\ B(y, r_{j-1}) \cap S \neq \emptyset}} \underbrace{\Pr[S = A \mid j \text{ を選択}]}_{= \Pr[S = A_j]}$$

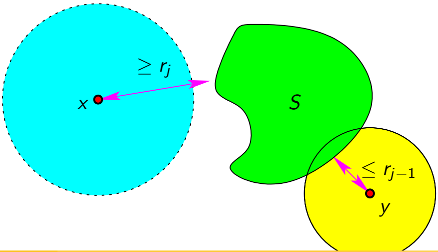
$$= \Pr[B^\circ(x, r_j) \cap A_j = \emptyset \text{ かつ } B(y, r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset]$$

$$= \Pr[B^\circ(x, r_j) \cap A_j = \emptyset] \cdot \Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset]$$

補足

$j \leq i \Rightarrow B^\circ(x, r_j) \cap B(y, r_{j-1}) = \emptyset$,

$\therefore B^\circ(x, r_j) \cap S = \emptyset$ と $B(y, r_{j-1}) \cap S \neq \emptyset$ という 2 つの事象は独立



確率を抑える (2)

$$\Pr[B^\circ(x, r_j) \cap A_j = \emptyset]$$

確率を抑える (2)

$$\Pr[B^\circ(x, r_j) \cap A_j = \emptyset] \quad = \quad \Pr[z \notin A_j \quad \forall\, z \in B^\circ(x, r_j)]$$

確率を抑える (2)

$$\begin{aligned}\Pr[B^\circ(x,r_j)\cap A_j=\emptyset] &= \Pr[z\notin A_j \quad \forall\, z\in B^\circ(x,r_j)] \\ &= \left(1-\frac{1}{2^j}\right)^{|B^\circ(x,r_j)|}\end{aligned}$$

備忘録 (A_j の構成)

各 $j\in\{1,\ldots,q\}$ に対して，$A_j\subseteq X$ は次で構成：
X の各点を確率 $1/2^j$ で独立に含める

確率を抑える (2)

$$\begin{aligned}\Pr[B^\circ(x,r_j)\cap A_j=\emptyset] &= \Pr[z\notin A_j \quad \forall\, z\in B^\circ(x,r_j)] \\ &= \left(1-\frac{1}{2^j}\right)^{|B^\circ(x,r_j)|} > \left(1-\frac{1}{2^j}\right)^{2^j}\end{aligned}$$

備忘録 (A_j の構成)

各 $j\in\{1,\ldots,q\}$ に対して，$A_j\subseteq X$ は次で構成：
X の各点を確率 $1/2^j$ で独立に含める

備忘録 (仮定と事実)

$|B^\circ(x,r_j)|<2^j$,

確率を抑える (2)

$$\begin{aligned}
\Pr[B^\circ(x,r_j)\cap A_j=\emptyset] &= \Pr[z\notin A_j \quad \forall\, z\in B^\circ(x,r_j)]\\
&= \left(1-\frac{1}{2^j}\right)^{|B^\circ(x,r_j)|} > \left(1-\frac{1}{2^j}\right)^{2^j}\\
&\geq \left(1-\frac{1}{2^1}\right)^{2^1}
\end{aligned}$$

備忘録 (A_j の構成)

各 $j\in\{1,\ldots,q\}$ に対して，$A_j\subseteq X$ は次で構成：
X の各点を確率 $1/2^j$ で独立に含める

備忘録 (仮定と事実)

$|B^\circ(x,r_j)|<2^j$，　$j\geq 1$ と $(1-1/2^j)^{2^j}$ は単調増加

確率を抑える (2)

$$\begin{aligned}
\Pr[B^\circ(x, r_j) \cap A_j = \emptyset] &= \Pr[z \notin A_j \quad \forall\, z \in B^\circ(x, r_j)] \\
&= \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{|B^\circ(x, r_j)|} > \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{2^j} \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{2^1}\right)^{2^1} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

備忘録 (A_j の構成)

各 $j \in \{1, \ldots, q\}$ に対して，$A_j \subseteq X$ は次で構成：
X の各点を確率 $1/2^j$ で独立に含める

備忘録 (仮定と事実)

$|B^\circ(x, r_j)| < 2^j$，$\quad j \geq 1$ と $(1 - 1/2^j)^{2^j}$ は単調増加

確率を抑える (3)

$$\Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset]$$

確率を抑える (3)

$$\Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset] \quad = \quad 1 - \Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j = \emptyset]$$

確率を抑える (3)

$$\begin{aligned}\Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset] &= 1 - \Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j = \emptyset] \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{|B(y, r_{j-1})|}\end{aligned}$$

確率を抑える (3)

$$\begin{aligned}
\Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset] &= 1 - \Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j = \emptyset] \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{|B(y, r_{j-1})|} \\
&\geq 1 - \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{2^{j-1}}
\end{aligned}$$

備忘録 (仮定と事実)

$|B(y, r_{j-1})| \geq 2^{j-1}$,

確率を抑える (3)

$$
\begin{aligned}
\Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset] &= 1 - \Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j = \emptyset] \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{|B(y, r_{j-1})|} \\
&\geq 1 - \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{2^{j-1}} \\
&\geq 1 - \exp\left(-\frac{1}{2^j} 2^{j-1}\right)
\end{aligned}
$$

備忘録 (仮定と事実)

$|B(y, r_{j-1})| \geq 2^{j-1}$,　　任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $1 + x \leq \exp(x)$

確率を抑える (3)

$$\begin{aligned}
\Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset] &= 1 - \Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j = \emptyset] \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{|B(y, r_{j-1})|} \\
&\geq 1 - \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{2^{j-1}} \\
&\geq 1 - \exp\left(-\frac{1}{2^j} 2^{j-1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}
\end{aligned}$$

備忘録 (仮定と事実)

$|B(y, r_{j-1})| \geq 2^{j-1}$,　　任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $1 + x \leq \exp(x)$

確率を抑える (3)

$$
\begin{aligned}
\Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset] &= 1 - \Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j = \emptyset] \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{|B(y, r_{j-1})|} \\
&\geq 1 - \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{2^{j-1}} \\
&\geq 1 - \exp\left(-\frac{1}{2^j} 2^{j-1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \geq \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

備忘録 (仮定と事実)

$|B(y, r_{j-1})| \geq 2^{j-1}$,　　任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $1 + x \leq \exp(x)$

まとめると…

$$\sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)|$$

$$\geq \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{i} (r_j - r_{j-1}) \Pr[B^\circ(x, r_j) \cap A_j = \emptyset] \cdot \Pr[B(y, r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset]$$

まとめると...

$$
\begin{aligned}
&\sum_{S\subseteq X} p_S|\mu(x,S)-\mu(y,S)| \\
&\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j-r_{j-1})\Pr[B^\circ(x,r_j)\cap A_j=\emptyset]\cdot\Pr[B(y,r_{j-1})\cap A_j\neq\emptyset] \\
&\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j-r_{j-1})\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

まとめると…

$$
\begin{aligned}
&\sum_{S\subseteq X} p_S|\mu(x,S)-\mu(y,S)| \\
&\quad\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j-r_{j-1})\Pr[B^\circ(x,r_j)\cap A_j=\emptyset]\cdot\Pr[B(y,r_{j-1})\cap A_j\neq\emptyset] \\
&\quad\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j-r_{j-1})\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \\
&\quad= \frac{1}{16q}\sum_{j=1}^{i}(r_j-r_{j-1})
\end{aligned}
$$

まとめると...

$$\begin{aligned}
&\sum_{S\subseteq X} p_S|\mu(x,S)-\mu(y,S)| \\
\geq\ & \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j-r_{j-1})\Pr[B^\circ(x,r_j)\cap A_j=\emptyset]\cdot\Pr[B(y,r_{j-1})\cap A_j\neq\emptyset] \\
\geq\ & \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j-r_{j-1})\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \\
=\ & \frac{1}{16q}\sum_{j=1}^{i}(r_j-r_{j-1}) \\
=\ & \frac{1}{16q}(r_i-r_0) \quad \text{(telescopic sum)}
\end{aligned}$$

まとめると…

$$
\begin{aligned}
&\sum_{S\subseteq X} p_S|\mu(x,S)-\mu(y,S)| \\
&\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j-r_{j-1})\Pr[B^\circ(x,r_j)\cap A_j=\emptyset]\cdot\Pr[B(y,r_{j-1})\cap A_j\neq\emptyset] \\
&\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j-r_{j-1})\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{16q}\sum_{j=1}^{i}(r_j-r_{j-1}) \\
&= \frac{1}{16q}(r_i-r_0) \qquad \text{(telescopic sum)} \\
&\geq \frac{1}{16q}\left(\frac{1}{2}\mu(x,y)-0\right)
\end{aligned}
$$

まとめると...

$$
\begin{aligned}
&\sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)| \\
&\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j - r_{j-1}) \Pr[B^{\circ}(x,r_j) \cap A_j = \emptyset] \cdot \Pr[B(y,r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset] \\
&\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j - r_{j-1}) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{16q}\sum_{j=1}^{i}(r_j - r_{j-1}) \\
&= \frac{1}{16q}(r_i - r_0) \quad \text{(telescopic sum)} \\
&\geq \frac{1}{16q}\left(\frac{1}{2}\mu(x,y) - 0\right) \\
&= \frac{1}{32q}\mu(x,y)
\end{aligned}
$$

まとめると...

$$
\begin{aligned}
&\sum_{S \subseteq X} p_S |\mu(x,S) - \mu(y,S)| \\
&\quad\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j - r_{j-1}) \Pr[B^\circ(x,r_j) \cap A_j = \emptyset] \cdot \Pr[B(y,r_{j-1}) \cap A_j \neq \emptyset] \\
&\quad\geq \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{i}(r_j - r_{j-1}) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\
&\quad= \frac{1}{16q}\sum_{j=1}^{i}(r_j - r_{j-1}) \\
&\quad= \frac{1}{16q}(r_i - r_0) \qquad \text{(telescopic sum)} \\
&\quad\geq \frac{1}{16q}\left(\frac{1}{2}\mu(x,y) - 0\right) \\
&\quad= \frac{1}{32q}\mu(x,y)
\end{aligned}
$$

□

1. Bourgain の定理
2. Bourgain の定理の証明：埋め込みの構成
3. Bourgain の定理の証明：歪みの上界
4. Bourgain の定理：補足
5. 弱い下界

Bourgain の定理：補足

- Bourgain の定理は ℓ_2 以外の ℓ_p への埋め込みに対しても成り立つ (演習問題)

定理 (Bourgain '85)

任意の $p \in [1, \infty)$ に対して
n 点から成る任意の距離空間は ℓ_p へ歪み $O(\log n)$ で埋めこめる

- Bourgain の定理で構成した埋め込みの次元は 2^n であった
  $\rightsquigarrow$ これは $O(\log^2 n)$ へ改善できる

定理 (Linial, London, Rabinovich '95)

任意の $p \in [1, \infty)$ に対して
n 点から成る任意の距離空間は $\ell_p^{O(\log^2 n)}$ へ歪み $O(\log n)$ で埋めこめる
そのような埋め込みは確率的多項式時間で発見できる

- ℓ_2 への埋め込みに対しては $O(\log n)$ 次元にできる (JL 補題より)

1. Bourgain の定理
2. Bourgain の定理の証明：埋め込みの構成
3. Bourgain の定理の証明：歪みの上界
4. Bourgain の定理：補足
5. 弱い下界

今から行うこと

流れ (遡行)

- Bourgain の定理がタイトであることを示す
  特に，ℓ_2 への埋め込みの歪みが $\Omega(\log n)$ になる具体例を与える
  (次の講義)
- その準備として，
  ℓ_2 への埋め込みの歪みが $\Omega(\sqrt{\log n})$ になる具体例を与える
  (この講義)
- 具体例はなかったが，$\Omega(\log n/\log\log n)$ は示した (前の講義)

定理 8.2 (Enflo '69)

頂点数 n の Hamming 立方体上の最短パス距離が ℓ_2 へ D-埋め込み可能
$\Rightarrow D = \Omega(\sqrt{\log n})$

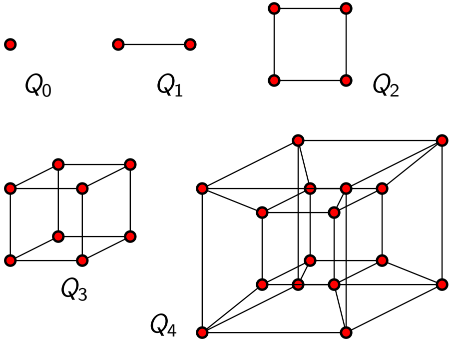
Hamming 立方体

$d \geq 2$：自然数

定義：Hamming 立方体

d 次元 Hamming 立方体 (Hamming cube) Q_d とは，次のグラフ

- 頂点集合 $V(Q_d) = \{0,1\}^d$
- 辺集合 $E(Q_d) = \{\{u,v\} \colon u$ と v の違いは 1 成分だけ $\}$



Hamming 立方体に対する下界

Q_d 自身で，Q_d 上 (辺重みがすべて 1) の最短パス距離空間を表すとする

定理 8.2 の言い換え

$d \geq 2$: 自然数
$f \colon V(Q_d) \to \ell_2$: D-埋め込み $\Rightarrow$ $D \geq \sqrt{d}$

Hamming 立方体に対する下界

Q_d 自身で，Q_d 上 (辺重みがすべて 1) の最短パス距離空間を表すとする

定理 8.2 の言い換え

$d \geq 2$: 自然数
$f : V(Q_d) \to \ell_2$: D-埋め込み $\Rightarrow D \geq \sqrt{d}$

注 : $n = |V(Q_d)| = 2^d$, $\therefore \sqrt{d} = \sqrt{\log_2 n}$

つまり

n 点から成る距離空間で ℓ_2 への埋め込みの歪みが $\sqrt{\log_2 n}$ よりも小さくできないものを構成

定理 8.2 の証明 (1)：記法

設定

- (X, μ), (X, ν)：距離空間
- $E, F \subseteq \binom{X}{2}$：$X$ の要素数 2 の部分集合の集まり (非空)

定理 8.2 の証明 (1)：記法

設定

- (X, μ), (X, ν)：距離空間
- $E, F \subseteq \binom{X}{2}$：$X$ の要素数 2 の部分集合の集まり (非空)

記法

- $\mathrm{ave}_2(\mu, E) = \sqrt{\frac{1}{|E|} \sum_{\{x,y\} \in E} \mu(x,y)^2}$　(二乗平均平方根)

定理 8.2 の証明 (1)：記法

設定

- (X, μ), (X, ν)：距離空間
- $E, F \subseteq \binom{X}{2}$：$X$ の要素数 2 の部分集合の集まり (非空)

記法

- $\mathrm{ave}_2(\mu, E) = \sqrt{\frac{1}{|E|} \sum_{\{x,y\} \in E} \mu(x, y)^2}$ (二乗平均平方根)
- $R_{E,F}(\mu) = \frac{\mathrm{ave}_2(\mu, F)}{\mathrm{ave}_2(\mu, E)}$

定理 8.2 の証明 (2)：観察

D-埋め込み $f\colon X \to \ell_2^k$ に対して，$\nu(x, y) = \|f(x) - f(y)\|_2$ とする

定理 8.2 の証明 (2)：観察

D-埋め込み $f\colon X \to \ell_2^k$ に対して，$\nu(x,y) = \|f(x) - f(y)\|_2$ とする

観察

$$R_{E,F}(\mu) \leq D \cdot R_{E,F}(\nu)$$

定理 8.2 の証明 (2)：観察

D-埋め込み $f : X \to \ell_2^k$ に対して，$\nu(x, y) = \|f(x) - f(y)\|_2$ とする

観察

$$R_{E,F}(\mu) \le D \cdot R_{E,F}(\nu)$$

<u>証明</u>:

定理 8.2 の証明 (2)：観察

D-埋め込み $f\colon X \to \ell_2^k$ に対して，$\nu(x,y) = \|f(x) - f(y)\|_2$ とする

観察

$$R_{E,F}(\mu) \le D \cdot R_{E,F}(\nu)$$

証明:

- f が D-埋め込みであることと，D-埋め込みの定義より，
  $\exists\, r$: $r \cdot \mu(x,y) \le \nu(x,y) \le D \cdot r \cdot \mu(x,y)$

定理 8.2 の証明 (2)：観察

D-埋め込み $f\colon X \to \ell_2^k$ に対して，$\nu(x,y) = \|f(x) - f(y)\|_2$ とする

観察

$$R_{E,F}(\mu) \leq D \cdot R_{E,F}(\nu)$$

<u>証明</u>:

- f が D-埋め込みであることと，D-埋め込みの定義より，
  $\exists\, r$: $r \cdot \mu(x,y) \leq \nu(x,y) \leq D \cdot r \cdot \mu(x,y)$
- $\therefore \mathrm{ave}_2(\mu, F) \leq \dfrac{1}{r}\mathrm{ave}_2(\nu, F)$

定理 8.2 の証明 (2)：観察

D-埋め込み $f\colon X \to \ell_2^k$ に対して，$\nu(x,y) = \|f(x) - f(y)\|_2$ とする

観察

$$R_{E,F}(\mu) \leq D \cdot R_{E,F}(\nu)$$

証明:

- f が D-埋め込みであることと，D-埋め込みの定義より，
  $\exists\, r$: $r \cdot \mu(x,y) \leq \nu(x,y) \leq D \cdot r \cdot \mu(x,y)$
- $\therefore\ \mathrm{ave}_2(\mu, F) \leq \dfrac{1}{r}\mathrm{ave}_2(\nu, F)$ かつ $\mathrm{ave}_2(\mu, E) \geq \dfrac{1}{Dr}\mathrm{ave}_2(\nu, E)$

定理 8.2 の証明 (2)：観察

D-埋め込み $f\colon X \to \ell_2^k$ に対して，$\nu(x,y) = \|f(x) - f(y)\|_2$ とする

観察

$$R_{E,F}(\mu) \le D \cdot R_{E,F}(\nu)$$

証明:

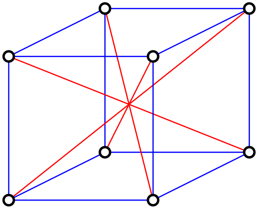
- f が D-埋め込みであることと，D-埋め込みの定義より，$\exists\, r$: $r \cdot \mu(x,y) \le \nu(x,y) \le D \cdot r \cdot \mu(x,y)$
- $\therefore\ \mathrm{ave}_2(\mu, F) \le \dfrac{1}{r}\mathrm{ave}_2(\nu, F)$ かつ $\mathrm{ave}_2(\mu, E) \ge \dfrac{1}{Dr}\mathrm{ave}_2(\nu, E)$
- $\therefore\ \dfrac{\mathrm{ave}_2(\mu, F)}{\mathrm{ave}_2(\mu, E)} \le \dfrac{\frac{1}{r}\mathrm{ave}_2(\nu, F)}{\frac{1}{Dr}\mathrm{ave}_2(\nu, E)} = D\dfrac{\mathrm{ave}_2(\nu, F)}{\mathrm{ave}_2(\nu, E)}$ □

定理 8.2 の証明 (3)：主張

定理 8.2 を証明するためには，次の主張を示せば十分

主張

ある $E, F \subseteq \binom{V(Q_d)}{2}$ に対して，$\dfrac{R_{E,F}(\mu)}{R_{E,F}(\nu)} \geq \sqrt{d}$



定理 8.2 の証明 (3)：主張

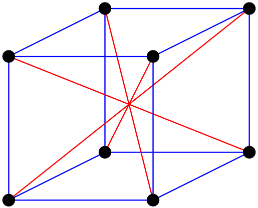
定理 8.2 を証明するためには，次の主張を示せば十分

主張

ある $E, F \subseteq \binom{V(Q_d)}{2}$ に対して，$\dfrac{R_{E,F}(\mu)}{R_{E,F}(\nu)} \geq \sqrt{d}$

主張の証明の流れ：

- $E = E(Q_d)$，$F = Q_d$ において距離 d である 2 頂点対全体の集合とする



定理 8.2 の証明 (3)：主張

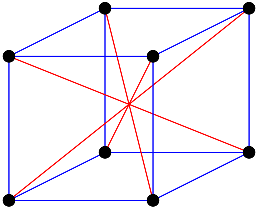
定理 8.2 を証明するためには，次の主張を示せば十分

主張

ある $E, F \subseteq \binom{V(Q_d)}{2}$ に対して，$\dfrac{R_{E,F}(\mu)}{R_{E,F}(\nu)} \geq \sqrt{d}$

主張の証明の流れ：

- $E = E(Q_d)$，$F = Q_d$ において距離 d である 2 頂点対全体の集合とする
- より正確に言うと，$F = \{\{v, \overline{v}\} \mid v \in V(Q_d)\}$，ただし $\overline{v}$ は v の各成分を交換したもの $(0 \leftrightarrow 1)$



定理 8.2 の証明 (3)：主張

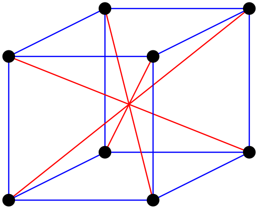
定理 8.2 を証明するためには，次の主張を示せば十分

主張

ある $E, F \subseteq \binom{V(Q_d)}{2}$ に対して，$\dfrac{R_{E,F}(\mu)}{R_{E,F}(\nu)} \geq \sqrt{d}$

主張の証明の流れ：

- $E = E(Q_d)$，$F = Q_d$ において距離 d である 2 頂点対全体の集合とする
- より正確に言うと，$F = \{\{v, \overline{v}\} \mid v \in V(Q_d)\}$，ただし $\overline{v}$ は v の各成分を交換したもの $(0 \leftrightarrow 1)$
- $R_{E,F}(\mu) = d$ を示す



定理 8.2 の証明 (3)：主張

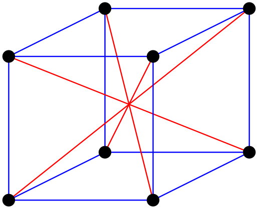
定理 8.2 を証明するためには，次の主張を示せば十分

主張

ある $E, F \subseteq \binom{V(Q_d)}{2}$ に対して，$\dfrac{R_{E,F}(\mu)}{R_{E,F}(\nu)} \geq \sqrt{d}$

主張の証明の流れ：

- $E = E(Q_d)$，$F = Q_d$ において距離 d である 2 頂点対全体の集合とする
- より正確に言うと，$F = \{\{v, \overline{v}\} \mid v \in V(Q_d)\}$，ただし $\overline{v}$ は v の各成分を交換したもの $(0 \leftrightarrow 1)$
- $R_{E,F}(\mu) = d$ を示す
- $R_{E,F}(\nu) \leq \sqrt{d}$ を示す

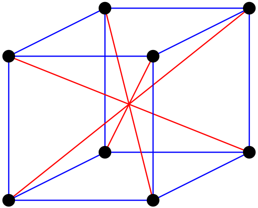


主張の証明：$R_{E,F}(\mu)$ の計算

備忘録

$E = E(Q_d)$, $F = \{\{v, \overline{v}\} \mid v \in V(Q_d)\}$

- $\mu(x, y) = 1$ for every $\{x, y\} \in E$

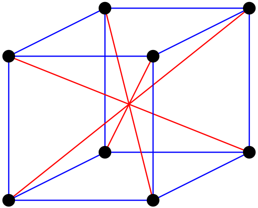


主張の証明：$R_{E,F}(\mu)$ の計算

備忘録

$E = E(Q_d)$, $F = \{\{v, \overline{v}\} \mid v \in V(Q_d)\}$

- $\mu(x, y) = 1$ for every $\{x, y\} \in E$
- $\therefore$ $\mathrm{ave}_2(\mu, E) = 1$

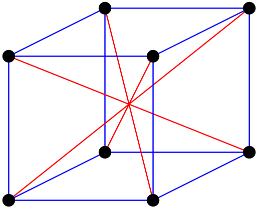


主張の証明：$R_{E,F}(\mu)$ の計算

備忘録

$E = E(Q_d), \quad F = \{\{v, \overline{v}\} \mid v \in V(Q_d)\}$

- $\mu(x, y) = 1$ for every $\{x, y\} \in E$
- $\therefore \mathrm{ave}_2(\mu, E) = 1$
- $\mu(x, y) = d$ for every $\{x, y\} \in F$

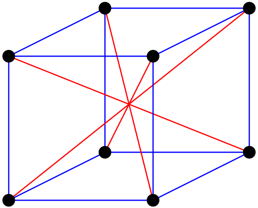


主張の証明：$R_{E,F}(\mu)$ の計算

備忘録

$E = E(Q_d)$,　$F = \{\{v, \overline{v}\} \mid v \in V(Q_d)\}$

- $\mu(x, y) = 1$ for every $\{x, y\} \in E$
- $\therefore \mathrm{ave}_2(\mu, E) = 1$
- $\mu(x, y) = d$ for every $\{x, y\} \in F$
- $\therefore \mathrm{ave}_2(\mu, F) = d$

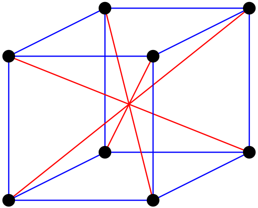


主張の証明：$R_{E,F}(\mu)$ の計算

備忘録

$E = E(Q_d)$, $F = \{\{v, \overline{v}\} \mid v \in V(Q_d)\}$

- $\mu(x,y) = 1$ for every $\{x,y\} \in E$
- $\therefore \mathrm{ave}_2(\mu, E) = 1$
- $\mu(x,y) = d$ for every $\{x,y\} \in F$
- $\therefore \mathrm{ave}_2(\mu, F) = d$
- $\therefore R_{E,F}(\mu) = \dfrac{\mathrm{ave}_2(\mu, F)}{\mathrm{ave}_2(\mu, E)} = d$



主張の証明：$R_{E,F}(\nu)$ の上界

$$R_{E,F}(\nu) = \frac{\mathrm{ave}_2(\nu, F)}{\mathrm{ave}_2(\nu, E)}$$

主張の証明：$R_{E,F}(\nu)$ の上界

$$
\begin{aligned}
R_{E,F}(\nu) &= \frac{\mathrm{ave}_2(\nu, F)}{\mathrm{ave}_2(\nu, E)} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1}{|F|}\sum_{\{u,v\}\in F} \nu(u,v)^2}}{\sqrt{\frac{1}{|E|}\sum_{\{u,v\}\in E} \nu(u,v)^2}}
\end{aligned}
$$

主張の証明：$R_{E,F}(\nu)$ の上界

$$
\begin{aligned}
R_{E,F}(\nu) &= \frac{\mathrm{ave}_2(\nu, F)}{\mathrm{ave}_2(\nu, E)} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1}{|F|}\sum_{\{u,v\}\in F} \nu(u,v)^2}}{\sqrt{\frac{1}{|E|}\sum_{\{u,v\}\in E} \nu(u,v)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{1}{2^{d-1}}\sum_{\{u,v\}\in F} \nu(u,v)^2}{\frac{1}{d2^{d-1}}\sum_{\{u,v\}\in E} \nu(u,v)^2}}
\end{aligned}
$$

主張の証明：$R_{E,F}(\nu)$ の上界

$$
\begin{aligned}
R_{E,F}(\nu) &= \frac{\mathrm{ave}_2(\nu, F)}{\mathrm{ave}_2(\nu, E)} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1}{|F|}\sum_{\{u,v\}\in F}\nu(u,v)^2}}{\sqrt{\frac{1}{|E|}\sum_{\{u,v\}\in E}\nu(u,v)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{1}{2^{d-1}}\sum_{\{u,v\}\in F}\nu(u,v)^2}{\frac{1}{d2^{d-1}}\sum_{\{u,v\}\in E}\nu(u,v)^2}} \\
&= \sqrt{d\frac{\sum_{\{u,v\}\in F}\nu(u,v)^2}{\sum_{\{u,v\}\in E}\nu(u,v)^2}}
\end{aligned}
$$

主張の証明：$R_{E,F}(\nu)$ の上界

$$
\begin{aligned}
R_{E,F}(\nu) &= \frac{\mathrm{ave}_2(\nu, F)}{\mathrm{ave}_2(\nu, E)} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1}{|F|}\sum_{\{u,v\}\in F}\nu(u,v)^2}}{\sqrt{\frac{1}{|E|}\sum_{\{u,v\}\in E}\nu(u,v)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{1}{2^{d-1}}\sum_{\{u,v\}\in F}\nu(u,v)^2}{\frac{1}{d2^{d-1}}\sum_{\{u,v\}\in E}\nu(u,v)^2}} \\
&= \sqrt{d\frac{\sum_{\{u,v\}\in F}\nu(u,v)^2}{\sum_{\{u,v\}\in E}\nu(u,v)^2}}
\end{aligned}
$$

$\therefore \displaystyle\sum_{\{u,v\}\in F}\nu(u,v)^2 \leq \sum_{\{u,v\}\in E}\nu(u,v)^2$ を示せば十分

主張'

記法

$$\nu^2(E) = \sum_{\{u,v\}\in E} \nu(u,v)^2,\ \nu^2(F) = \sum_{\{u,v\}\in F} \nu(u,v)^2$$

主張'

$$\nu^2(F) \leq \nu^2(E)$$

主張'

記法

$$\nu^2(E) = \sum_{\{u,v\}\in E} \nu(u,v)^2,\ \nu^2(F) = \sum_{\{u,v\}\in F} \nu(u,v)^2$$

主張'

$\nu^2(F) \leq \nu^2(E)$

主張' の証明の流れ：

- d に関する帰納法
- $d = 2$ のとき，計算を直接行えばよい
- $d > 2$ のとき，立方体の再帰構造を利用する

主張' の証明：$d = 2$

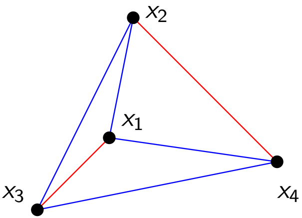
$d = 2$ の場合を証明するために，次の補題を用いる

補題 (短対角線補題 (short diagonals lemma))

ユークリッド空間における任意の 4 点 x_1, x_2, x_3, x_4 に対して

$$\|x_1 - x_3\|_2^2 + \|x_2 - x_4\|_2^2 \le \|x_1 - x_2\|_2^2 + \|x_2 - x_3\|_2^2 + \|x_3 - x_4\|_2^2 + \|x_4 - x_1\|_2^2$$

証明：演習問題



主張' の証明 : $d = 2$

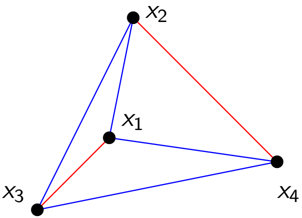
$d = 2$ の場合を証明するために，次の補題を用いる

補題 (短対角線補題 (short diagonals lemma))

ユークリッド空間における任意の 4 点 x_1, x_2, x_3, x_4 に対して

$$\|x_1 - x_3\|_2^2 + \|x_2 - x_4\|_2^2 \leq \|x_1 - x_2\|_2^2 + \|x_2 - x_3\|_2^2 + \|x_3 - x_4\|_2^2 + \|x_4 - x_1\|_2^2$$

証明 : 演習問題



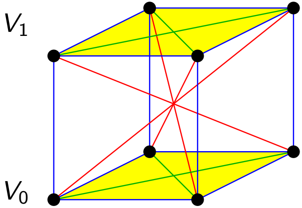
主張' の証明 ($d = 2$ のとき) :

- $x_i = f(v_i)$ として短対角線補題を使用
- 左辺 $= \nu^2(F)$，右辺 $= \nu^2(E)$

□

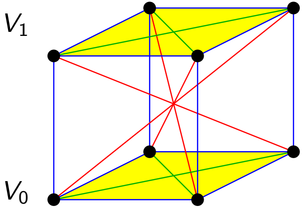
主張' の証明 : $d > 2$ (1)

- 頂点集合 $V = \{0,1\}^d$ を次の 2 つへ分解



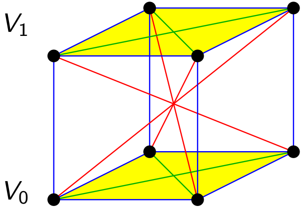
主張' の証明：$d > 2$ (1)

- 頂点集合 $V = \{0,1\}^d$ を次の 2 つへ分解
  - $V_0 = \{0,1\}^{d-1} \times \{0\} = \{(u,0) \colon u \in \{0,1\}^{d-1}\}$



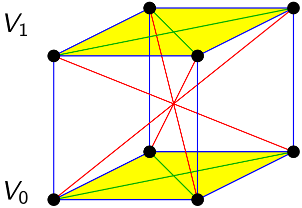
主張' の証明：$d > 2$ (1)

- 頂点集合 $V = \{0,1\}^d$ を次の 2 つへ分解
  - $V_0 = \{0,1\}^{d-1} \times \{0\} = \{(u,0) \colon u \in \{0,1\}^{d-1}\}$
  - $V_1 = \{0,1\}^{d-1} \times \{1\} = \{(u,1) \colon u \in \{0,1\}^{d-1}\}$



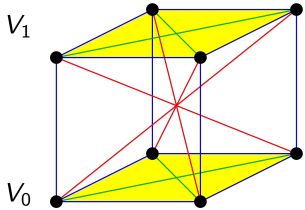
主張' の証明：$d > 2$ (1)

- 頂点集合 $V = \{0,1\}^d$ を次の 2 つへ分解
  - $V_0 = \{0,1\}^{d-1} \times \{0\} = \{(u,0) \colon u \in \{0,1\}^{d-1}\}$
  - $V_1 = \{0,1\}^{d-1} \times \{1\} = \{(u,1) \colon u \in \{0,1\}^{d-1}\}$
- V_i の上に $(d-1)$-次元 Hamming 立方体が誘導される



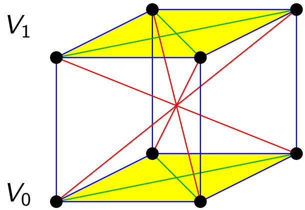
主張' の証明 : $d > 2$ (1)

- 頂点集合 $V = \{0,1\}^d$ を次の 2 つへ分解
  - $V_0 = \{0,1\}^{d-1} \times \{0\} = \{(u,0) \colon u \in \{0,1\}^{d-1}\}$
  - $V_1 = \{0,1\}^{d-1} \times \{1\} = \{(u,1) \colon u \in \{0,1\}^{d-1}\}$
- V_i の上に $(d-1)$-次元 Hamming 立方体が誘導される
- $E_i = V_i$ 上に誘導される Hamming 立方体の辺集合
  $F_i = V_i$ 上に誘導される Hamming 立方体において
  距離 $d-1$ の頂点対全体の集合



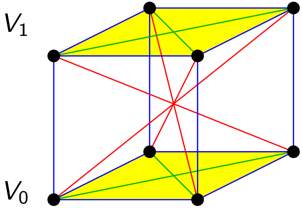
主張' の証明 : $d > 2$ (1)

- 頂点集合 $V = \{0,1\}^d$ を次の 2 つへ分解
  - $V_0 = \{0,1\}^{d-1} \times \{0\} = \{(u,0) \colon u \in \{0,1\}^{d-1}\}$
  - $V_1 = \{0,1\}^{d-1} \times \{1\} = \{(u,1) \colon u \in \{0,1\}^{d-1}\}$
- V_i の上に $(d-1)$-次元 Hamming 立方体が誘導される
- E_i = V_i 上に誘導される Hamming 立方体の辺集合
  F_i = V_i 上に誘導される Hamming 立方体において
  距離 $d-1$ の頂点対全体の集合
- $\nu^2(F_i) \leq \nu^2(E_i)$ ($\because$ 帰納法の仮定)



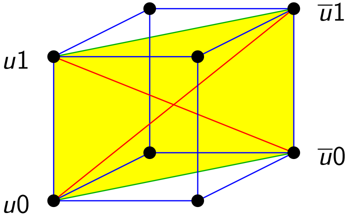
主張' の証明：$d > 2$ (1)

- 頂点集合 $V = \{0,1\}^d$ を次の 2 つへ分解
  - $V_0 = \{0,1\}^{d-1} \times \{0\} = \{(u,0) \colon u \in \{0,1\}^{d-1}\}$
  - $V_1 = \{0,1\}^{d-1} \times \{1\} = \{(u,1) \colon u \in \{0,1\}^{d-1}\}$
- V_i の上に $(d-1)$-次元 Hamming 立方体が誘導される
- $E_i = V_i$ 上に誘導される Hamming 立方体の辺集合
  $F_i = V_i$ 上に誘導される Hamming 立方体において
  距離 $d-1$ の頂点対全体の集合
- $\nu^2(F_i) \leq \nu^2(E_i)$ (∵ 帰納法の仮定)
- $E_{01} = E \setminus (E_0 \cup E_1)$ とする



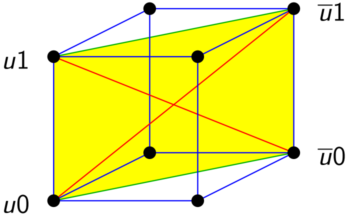
主張' の証明：$d > 2$ (2)

- F の要素はどれも $\{(u,0),(\overline{u},1)\}$ という格好をしている



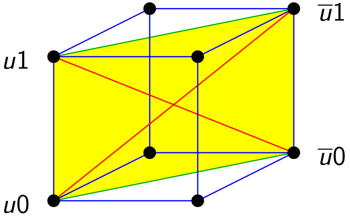
主張' の証明 : $d > 2$ (2)

- F の要素はどれも $\{(u,0),(\overline{u},1)\}$ という格好をしている
- 短対角線補題より
  $\nu(u0,\overline{u}1)^2+\nu(u1,\overline{u}0)^2 \leq$
  $\nu(u0,\overline{u}0)^2+\nu(\overline{u}0,\overline{u}1)^2+\nu(\overline{u}1,u1)^2+\nu(u1,u0)^2$



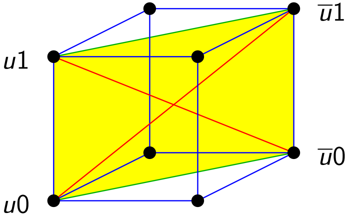
主張' の証明 : $d > 2$ (2)

- F の要素はどれも $\{(u,0),(\overline{u},1)\}$ という格好をしている
- 短対角線補題より
  $\nu(u0,\overline{u}1)^2+\nu(u1,\overline{u}0)^2 \leq$
  $\nu(u0,\overline{u}0)^2+\nu(\overline{u}0,\overline{u}1)^2+\nu(\overline{u}1,u1)^2+\nu(u1,u0)^2$
- この不等式をすべての u の上で足し上げると
  $\nu^2(F) \leq \nu^2(E_{01}) + \nu^2(F_0) + \nu^2(F_1)$



主張' の証明 : $d > 2$ (2)

- F の要素はどれも $\{(u, 0), (\overline{u}, 1)\}$ という格好をしている
- 短対角線補題より
  $\nu(u0, \overline{u}1)^2 + \nu(u1, \overline{u}0)^2 \leq$
  $\nu(u0, \overline{u}0)^2 + \nu(\overline{u}0, \overline{u}1)^2 + \nu(\overline{u}1, u1)^2 + \nu(u1, u0)^2$
- この不等式をすべての u の上で足し上げると
  $\nu^2(F) \leq \nu^2(E_{01}) + \nu^2(F_0) + \nu^2(F_1)$
- $\therefore \nu^2(F) \leq \nu^2(E_{01}) + \nu^2(E_0) + \nu^2(E_1) = \nu^2(E)$ □



次の講義で行うこと

定理 8.2 (Enflo '69)

頂点数 n の Hamming 立方体上の最短パス距離が ℓ_2 へ D-埋め込み可能 $\Rightarrow D = \Omega(\sqrt{\log n})$

流れ (遡行)

- Bourgain の定理がタイトであることを示す
  特に，ℓ_2 への埋め込みの歪みが $\Omega(\log n)$ になる具体例を与える
  (次の講義)
- その準備として，
  ℓ_2 への埋め込みの歪みが $\Omega(\sqrt{\log n})$ になる具体例を与える
  (この講義)
- 具体例はなかったが，$\Omega(\log n/\log\log n)$ は示した　(前の講義)

1. Bourgain の定理
2. Bourgain の定理の証明：埋め込みの構成
3. Bourgain の定理の証明：歪みの上界
4. Bourgain の定理：補足
5. 弱い下界