

情報基礎数理学特選
有限距離空間の離散幾何学とアルゴリズム
(7) 歪みと次元のトレードオフ

岡本 吉央

北陸先端科学技術大学院大学

2011年1月13日

”最終更新：2011/01/14 12:59”

- ① 歪みと次元の関係
- ② グラフの用語
- ③ 歪みと次元の関係：下界
- ④ l_2 に対する歪みの下界

歪みと次元の関係

$(X, \mu), (X', \ell_p^d)$: 距離空間, $\varphi: X \rightarrow X'$: D -埋め込み

直観 : トレードオフ

歪み D :	小	→→→	大
次元 d :	高	←←←	低

- ▶ 歪みを小さくしたいと望めば, 次元を高くしなければならない
- ▶ 次元を低くしたいと望めば, 歪みを大きくしなければならない

そのような定理と応用を見ていく

- ▶ この講義では, 特に「不可能性」を見ていく
- ▶ そのために, グラフ理論の概念, 結果を用いていく

- ① 歪みと次元の関係
- ② グラフの用語
- ③ 歪みと次元の関係：下界
- ④ l_2 に対する歪みの下界

グラフ

定義：グラフ

グラフ (graph) とは 2 個組 (V, E) で,

- ▶ V : 有限集合
- ▶ $E \subseteq \binom{V}{2}$: V の要素の 2 個組の集合

のことである

例 :

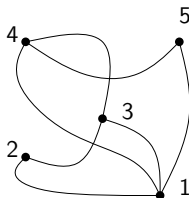
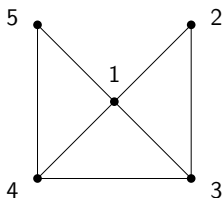
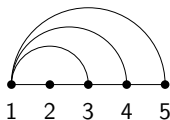
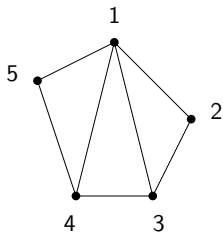
- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

グラフの描画

グラフを絵で表現することが多い

例：

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



頂点, 辺

グラフ $G = (V, E)$ に対して

- ▶ V : **頂点集合** (vertex set), $v \in V$: **頂点** (vertex)
- ▶ E : **辺集合** (edge set), $e \in E$: **辺** (edge)

定義 : グラフの位数 (頂点数)

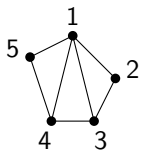
G の**位数** (order) とは $|V|$ のこと

($n(G)$ で表す)

定義 : グラフのサイズ (辺数)

G の**サイズ** (size) とは $|E|$ のこと

($e(G)$ で表す)



$$n(G) = 5, e(G) = 7$$

隣接性, 接続性

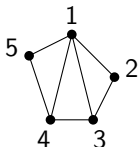
 $G = (V, E)$: グラフ

定義 : 隣接性

2 頂点 $u, v \in V$ が隣接している (adjacent) とは,
 $\{u, v\} \in E$ を満たすことである

定義 : 接続性

頂点 $v \in V$ と辺 $e \in E$ が接続している (incident) とは,
 $v \in e$ を満たすことである
 このとき, v は e の端点 (endpoint) である



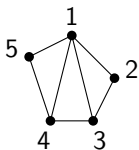
- ▶ 2 は 3 に隣接している
- ▶ 3 は 5 に隣接していない
- ▶ 1 は $\{1, 3\}$ に接続している
- ▶ $\{1, 3\}$ は 1 に接続している
- ▶ $\{2, 3\}$ は 4 に接続していない

パス

 $G = (V, E)$: グラフ

定義 : パス

G における**パス** (path) とは、その異なる頂点の列 v_1, \dots, v_k で、任意の $i \in \{1, \dots, k-1\}$ に対して、 $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ を満たすもののこと



- ▶ 1, 2, 3 はパス
- ▶ 2, 3, 4 はパス
- ▶ 4, 1, 2, 3 はパス
- ▶ 4, 2, 1, 3 はパスではない

さらに定義

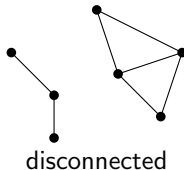
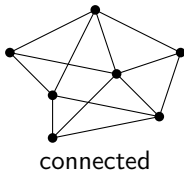
- ▶ パス v_1, \dots, v_k の**長さ**とは $k-1$ のこと
- ▶ パス v_1, \dots, v_k の**端点**とは v_1, v_k のこと
- ▶ **u, v -パス**とは、 u, v を端点とするパスのこと

連結性

 $G = (V, E)$: グラフ

定義 : 連結性

G が**連結である** (connected) とは,
任意の $u, v \in V$ に対して u, v -パスが存在すること
そうでないとき, G は**非連結** (disconnected) である

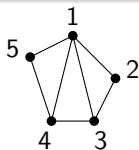


グラフ上の距離

$G = (V, E)$: グラフ

定義 : 最短パス距離

2 頂点 $u, v \in V$ の間の最短パス距離 (shortest-path distance) とは
 u, v -パスの最短長のこと ($d_G(u, v)$ で表す)
 u, v -パスが存在しないときは ∞ とする



▶ $d_G(1, 3) = 1$

▶ $d_G(2, 5) = 2$

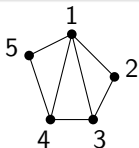
G が連結であるとき, (V, d_G) は距離空間である

サイクル

 $G = (V, E)$: グラフ

定義 : サイクル

G における**サイクル** (cycle) とは, その頂点列 v_1, \dots, v_k, v_1 で, v_1, \dots, v_k はパスであり, $\{v_k, v_1\} \in E$ を満たすもののこと



- ▶ 1, 2, 3, 1 はサイクル
- ▶ 4, 1, 2, 3, 4 はサイクル
- ▶ 2, 3, 4, 2 はサイクルではない

定義 : サイクルの長さ

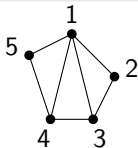
サイクル v_1, \dots, v_k, v_1 の**長さ**とは k のこと

内周

 $G = (V, E)$: グラフ

定義 : 内周

G の内周 (girth) とは G の最小サイクル長
サイクルが存在しないときは ∞ とする

 $(g(G))$ で表す)

内周は 3

内周と辺数

記法

$\ell \geq 2$ に対して

$$m(\ell, n) = \max\{e(G) \mid n(G) = n, g(G) \geq \ell + 1\}$$

観察

- ▶ $m(2, n) = \binom{n}{2}$ (簡単)
- ▶ $m(3, n) = \Omega(n^2)$ (簡単)
- ▶ $m(4, n) = \Omega(n^{3/2})$ (演習問題)
- ▶ $m(\ell, n) \geq m(\ell + 1, n)$ (簡単)
- ▶ $m(2k + 1, n) \geq \frac{1}{2}m(2k, n)$ (演習問題)

つまり、 $m(2k, n)$ と $m(2k + 1, n)$ は同じオーダー

Erdős の内周予想

予想 (Erdős, '65)

任意の $k \geq 1$ に対して

$$m(2k + 1, n) = \Omega(n^{1+1/k})$$

正しいと分かっている場合 : $k = 1, 2, 3, 5$ のみ

特に

- ▶ $m(3, n) = \Omega(n^2)$ (既出)
- ▶ $m(5, n) = \Omega(n^{3/2})$ (既出)
- ▶ $m(7, n) = \Omega(n^{4/3})$ (Benson '66)
- ▶ $m(11, n) = \Omega(n^{6/5})$ (Benson '66)

知られている最良の下界 $m(2k + 1, n) = \Omega(n^{1+\frac{2}{3k}}$ ぐらい)
(Lazebnik, Ustimenko, Woldar '95)

① 歪みと次元の関係

② グラフの用語

③ 歪みと次元の関係：下界

④ l_2 に対する歪みの下界

歪みと次元の関係：下界

定理 7.1

仮定：

- ▶ n 個の点から成る距離空間がすべて $\ell_2^d \curvearrowright D$ -埋め込み可能
- ▶ $D < \ell \leq 5D$

結論：

$$\text{▶ } d \geq \frac{1}{\log_2 \frac{20D\ell}{\ell-D}} \cdot \frac{m(\ell, n)}{n}$$

注：

- ▶ 今から見る証明は ℓ_2^d でなく、 ℓ_p^d に対して同じ結論を導く
- ▶ 「 $\ell \leq 5D$ 」という上界は本質でなく、証明を簡単にするための仮定（「 $5D$ 」の5を大きくしたら、「20」を大きくすればよい）

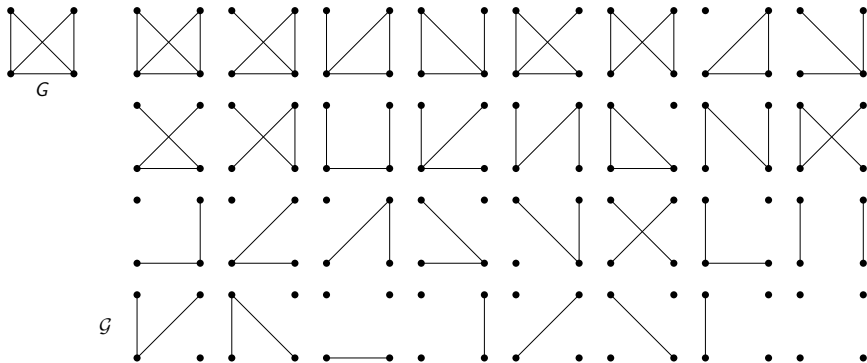
証明の方針：内周の大きなグラフから、本質的に異なるたくさんの距離空間を作成する

定理 7.1 の証明 (1)

$G = (V, E)$: グラフ, $|V| = n$, $|E| = m = m(\ell, n)$, $g(G) \geq \ell + 1$

▶ 任意の $F \subseteq E$ に対して, グラフ $G_F = (V, F)$ を考える

▶ $\mathcal{G} = \{G_F \mid F \subseteq E\}$ とする



定理 7.1 の証明 (2)

- ▶ 任意の $F \subseteq E$ に対して, 距離空間 (V, μ_F) を

$$\mu_F(u, v) = \min\{\ell, d_{G_F}(u, v)\}$$

で定義する (これは距離空間である (演習問題))

定理 7.1 の証明 (2)

- ▶ 任意の $F \subseteq E$ に対して, 距離空間 (V, μ_F) を

$$\mu_F(u, v) = \min\{\ell, d_{G_F}(u, v)\}$$

で定義する (これは距離空間である (演習問題))

- ▶ 各 $F \subseteq E$ に対して
 (V, μ_F) から ℓ_2^d への D -埋め込み φ_F が存在すると仮定

定理 7.1 の証明 (2)

- ▶ 任意の $F \subseteq E$ に対して, 距離空間 (V, μ_F) を

$$\mu_F(u, v) = \min\{\ell, d_{G_F}(u, v)\}$$

で定義する (これは距離空間である (演習問題))

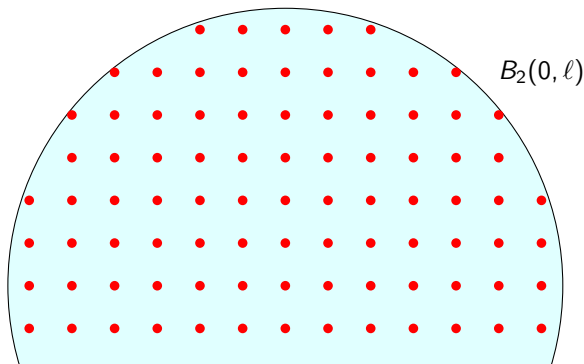
- ▶ 各 $F \subseteq E$ に対して
 (V, μ_F) から ℓ_2^d への D -埋め込み φ_F が存在すると仮定
- ▶ スケーリングによって, 一般性を失わずに次を仮定
 - ▶ $\frac{1}{D}\mu_F(u, v) \leq \|\varphi_F(u) - \varphi_F(v)\|_2 \leq \mu_F(u, v) \ (\forall u, v \in V)$
 - ▶ $\varphi_F(v) \in B_2(0, \ell) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq \ell\} \ (\forall v \in V)$

定理 7.1 の証明 (3)

$$\blacktriangleright \varepsilon = \frac{1}{5} \left(\frac{\ell}{D} - 1 \right) \text{ とおく} \quad (D < \ell \leq 5D \text{ より, } 0 < \varepsilon < 1)$$

定理 7.1 の証明 (3)

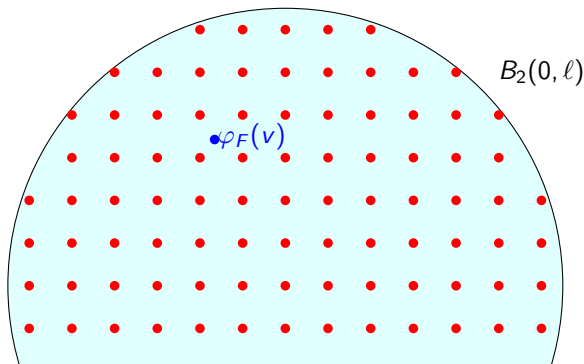
- ▶ $\varepsilon = \frac{1}{5} \left(\frac{\ell}{D} - 1 \right)$ とおく ($D < \ell \leq 5D$ より, $0 < \varepsilon < 1$)
- ▶ $N \subseteq B_2(0, \ell)$: ε -稠密集合, $|N| \leq (4\ell/\varepsilon)^d$ (演習問題)



定理 7.1 の証明 (3)

- ▶ $\varepsilon = \frac{1}{5} \left(\frac{\ell}{D} - 1 \right)$ とおく ($D < \ell \leq 5D$ より, $0 < \varepsilon < 1$)
- ▶ $N \subseteq B_2(0, \ell)$: ε -稠密集合, $|N| \leq (4\ell/\varepsilon)^d$ (演習問題)
- ▶ 各 $F \subseteq E$ に対して $\psi_F: V \rightarrow N$ を次で定義

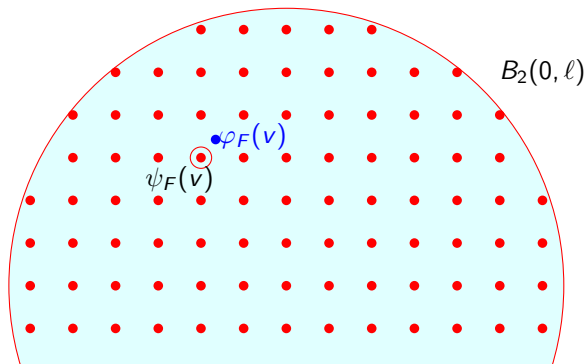
$\psi_F(v) = N$ における $\varphi_F(v)$ の最近点



定理 7.1 の証明 (3)

- ▶ $\varepsilon = \frac{1}{5} \left(\frac{\ell}{D} - 1 \right)$ とおく ($D < \ell \leq 5D$ より, $0 < \varepsilon < 1$)
- ▶ $N \subseteq B_2(0, \ell)$: ε -稠密集合, $|N| \leq (4\ell/\varepsilon)^d$ (演習問題)
- ▶ 各 $F \subseteq E$ に対して $\psi_F: V \rightarrow N$ を次で定義

$\psi_F(v) = N$ における $\varphi_F(v)$ の最近点



定理 7.1 の証明 (4)

$$\blacktriangleright \|\varphi_F(v) - \psi_F(v)\|_2 \leq \varepsilon$$

($\because N$ の ε -稠密性)

定理 7.1 の証明 (4)

$$\blacktriangleright \|\varphi_F(v) - \psi_F(v)\|_2 \leq \varepsilon$$

($\because N$ の ε -稠密性)

主張

任意の異なる $F_1, F_2 \subseteq E$ に対して, $\psi_{F_1} \neq \psi_{F_2}$

定理 7.1 の証明 (4)

$$\triangleright \|\varphi_F(v) - \psi_F(v)\|_2 \leq \varepsilon$$

($\because N$ の ε -稠密性)

主張

任意の異なる $F_1, F_2 \subseteq E$ に対して, $\psi_{F_1} \neq \psi_{F_2}$

主張が正しいと仮定して, 証明を続けると

- $\triangleright 2^m$ 個の異なる写像 $V \rightarrow N$ が得られた

定理 7.1 の証明 (4)

$$\triangleright \|\varphi_F(v) - \psi_F(v)\|_2 \leq \varepsilon$$

($\because N$ の ε -稠密性)

主張

任意の異なる $F_1, F_2 \subseteq E$ に対して, $\psi_{F_1} \neq \psi_{F_2}$

主張が正しいと仮定して, 証明を続けると

- $\triangleright 2^m$ 個の異なる写像 $V \rightarrow N$ が得られた
- $\triangleright \therefore 2^m \leq |N|^{|V|}$

定理 7.1 の証明 (4)

$$\triangleright \|\varphi_F(v) - \psi_F(v)\|_2 \leq \varepsilon$$

($\because N$ の ε -稠密性)

主張

任意の異なる $F_1, F_2 \subseteq E$ に対して, $\psi_{F_1} \neq \psi_{F_2}$

主張が正しいと仮定して, 証明を続けると

$\triangleright 2^m$ 個の異なる写像 $V \rightarrow N$ が得られた

$$\triangleright \therefore 2^m \leq |N|^{|V|} \leq \left(\frac{4\ell}{\varepsilon}\right)^{dn}$$

定理 7.1 の証明 (4)

$$\triangleright \|\varphi_F(v) - \psi_F(v)\|_2 \leq \varepsilon$$

($\because N$ の ε -稠密性)

主張

任意の異なる $F_1, F_2 \subseteq E$ に対して, $\psi_{F_1} \neq \psi_{F_2}$

主張が正しいと仮定して, 証明を続けると

$\triangleright 2^m$ 個の異なる写像 $V \rightarrow N$ が得られた

$$\triangleright \therefore 2^m \leq |N|^{|V|} \leq \left(\frac{4\ell}{\varepsilon}\right)^{dn}$$

$$\triangleright \therefore m \leq dn \log_2 \frac{4\ell}{\varepsilon}$$

定理 7.1 の証明 (4)

$$\triangleright \|\varphi_F(v) - \psi_F(v)\|_2 \leq \varepsilon$$

($\because N$ の ε -稠密性)

主張

任意の異なる $F_1, F_2 \subseteq E$ に対して, $\psi_{F_1} \neq \psi_{F_2}$

主張が正しいと仮定して, 証明を続けると

$\triangleright 2^m$ 個の異なる写像 $V \rightarrow N$ が得られた

$$\triangleright \therefore 2^m \leq |N|^{|V|} \leq \left(\frac{4\ell}{\varepsilon}\right)^{dn}$$

$$\triangleright \therefore m \leq dn \log_2 \frac{4\ell}{\varepsilon} = dn \log_2 \frac{20D\ell}{\ell - D}$$

定理 7.1 の証明 (4)

$$\triangleright \|\varphi_F(v) - \psi_F(v)\|_2 \leq \varepsilon$$

($\because N$ の ε -稠密性)

主張

任意の異なる $F_1, F_2 \subseteq E$ に対して, $\psi_{F_1} \neq \psi_{F_2}$

主張が正しいと仮定して, 証明を続けると

$\triangleright 2^m$ 個の異なる写像 $V \rightarrow N$ が得られた

$$\triangleright \therefore 2^m \leq |N|^{|V|} \leq \left(\frac{4\ell}{\varepsilon}\right)^{dn}$$

$$\triangleright \therefore m \leq dn \log_2 \frac{4\ell}{\varepsilon} = dn \log_2 \frac{20D\ell}{\ell - D}$$

$$\triangleright \therefore d \geq \frac{1}{\log_2 \frac{20D\ell}{\ell - D}} \cdot \frac{m}{n}$$

□

定理 7.1 の証明 (5) : 主張の証明 (1)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$

定理 7.1 の証明 (5) : 主張の証明 (1)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = 0$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)

定理 7.1 の証明 (5) : 主張の証明 (1)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2$ を上から抑えると
 $\|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2$

定理 7.1 の証明 (5) : 主張の証明 (1)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2$ を上から抑えると

$$\begin{aligned} & \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\ &= \|\psi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(u) + \varphi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(v) + \varphi_{F_1}(v) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \end{aligned}$$

定理 7.1 の証明 (5) : 主張の証明 (1)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2$ を上から抑えると

$$\begin{aligned} & \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\ &= \|\psi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(u) + \varphi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(v) + \varphi_{F_1}(v) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\ &\leq \|\psi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(u)\|_2 + \|\varphi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(v)\|_2 + \|\varphi_{F_1}(v) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\ & \hspace{15em} \text{(三角不等式)} \end{aligned}$$

定理 7.1 の証明 (5) : 主張の証明 (1)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2$ を上から抑えると

$$\begin{aligned} & \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\ &= \|\psi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(u) + \varphi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(v) + \varphi_{F_1}(v) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\ &\leq \|\psi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(u)\|_2 + \|\varphi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(v)\|_2 + \|\varphi_{F_1}(v) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\ & \hspace{15em} \text{(三角不等式)} \\ &\leq \varepsilon + \mu_{F_1}(u, v) + \varepsilon \end{aligned}$$

定理 7.1 の証明 (5) : 主張の証明 (1)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2$ を上から抑えると

$$\begin{aligned} & \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\ &= \|\psi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(u) + \varphi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(v) + \varphi_{F_1}(v) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\ &\leq \|\psi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(u)\|_2 + \|\varphi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(v)\|_2 + \|\varphi_{F_1}(v) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\ & \hspace{15em} \text{(三角不等式)} \\ &\leq \varepsilon + \mu_{F_1}(u, v) + \varepsilon = 1 + 2\varepsilon \end{aligned}$$

定理 7.1 の証明 (6) : 主張の証明 (2)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$ を下から抑えると

定理 7.1 の証明 (6) : 主張の証明 (2)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$ を下から抑えると
 $\|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$

定理 7.1 の証明 (6) : 主張の証明 (2)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$ を下から抑えると

$$\begin{aligned} & \|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\ &= \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v) + \psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u) + \varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \end{aligned}$$

定理 7.1 の証明 (6) : 主張の証明 (2)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$ を下から抑えようと

$$\begin{aligned} & \|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\ &= \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v) + \psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u) + \varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\ &\geq \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v)\|_2 - \|\psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u)\|_2 - \|\varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \end{aligned}$$

定理 7.1 の証明 (6) : 主張の証明 (2)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$ を下から抑えると

$$\begin{aligned}
 & \|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &= \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v) + \psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u) + \varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &\geq \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v)\|_2 - \|\psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u)\|_2 - \|\varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &\geq \frac{1}{D} \mu_{F_2}(u, v) - 2\varepsilon
 \end{aligned}$$

定理 7.1 の証明 (6) : 主張の証明 (2)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$ を下から抑えると

$$\begin{aligned}
 & \|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &= \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v) + \psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u) + \varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &\geq \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v)\|_2 - \|\psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u)\|_2 - \|\varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &\geq \frac{1}{D} \mu_{F_2}(u, v) - 2\varepsilon = \frac{\ell}{D} - 2\varepsilon
 \end{aligned}$$

定理 7.1 の証明 (6) : 主張の証明 (2)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$ を下から抑えると

$$\begin{aligned}
 & \|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &= \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v) + \psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u) + \varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &\geq \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v)\|_2 - \|\psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u)\|_2 - \|\varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &\geq \frac{1}{D} \mu_{F_2}(u, v) - 2\varepsilon = \frac{\ell}{D} - 2\varepsilon = (5\varepsilon + 1) - 2\varepsilon
 \end{aligned}$$

定理 7.1 の証明 (6) : 主張の証明 (2)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ ある $u, v \in V$ に対して, $\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- ▶ $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ ($\because g(G) \geq \ell + 1$)
- ▶ $\|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$ を下から抑えようと

$$\begin{aligned}
 & \|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &= \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v) + \psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u) + \varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &\geq \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v)\|_2 - \|\psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u)\|_2 - \|\varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
 &\geq \frac{1}{D} \mu_{F_2}(u, v) - 2\varepsilon = \frac{\ell}{D} - 2\varepsilon = (5\varepsilon + 1) - 2\varepsilon = 1 + 3\varepsilon
 \end{aligned}$$

定理 7.1 の証明 (4) : 主張の証明 (3)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

$$\blacktriangleright \therefore \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \leq 1 + 2\varepsilon, \quad 1 + 3\varepsilon \leq \|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$$

定理 7.1 の証明 (4) : 主張の証明 (3)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

$$\blacktriangleright \therefore \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \leq 1 + 2\varepsilon < 1 + 3\varepsilon \leq \|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$$

定理 7.1 の証明 (4) : 主張の証明 (3)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ $\therefore \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \leq 1 + 2\varepsilon < 1 + 3\varepsilon \leq \|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$
- ▶ $\psi_{F_1}(u) = \psi_{F_2}(u)$ かつ $\psi_{F_1}(v) = \psi_{F_2}(v)$ だとすると

$$\|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\| < \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|$$

となり, 矛盾

定理 7.1 の証明 (4) : 主張の証明 (3)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ▶ $\therefore \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \leq 1 + 2\varepsilon < 1 + 3\varepsilon \leq \|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$
- ▶ $\psi_{F_1}(u) = \psi_{F_2}(u)$ かつ $\psi_{F_1}(v) = \psi_{F_2}(v)$ だとすると

$$\|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\| < \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|$$

となり, 矛盾

- ▶ $\therefore \psi_{F_1}(u) \neq \psi_{F_2}(u)$ または $\psi_{F_1}(v) \neq \psi_{F_2}(v)$
- ▶ つまり, $\psi_{F_1} \neq \psi_{F_2}$

□

歪みと次元の関係：下界

定理 7.1 (再掲)

仮定：

- ▶ n 個の点から成る距離空間がすべて $\ell_2^d \rightarrow D$ -埋め込み可能
- ▶ $D < \ell \leq 5D$

結論：

$$\text{▶ } d \geq \frac{1}{\log_2 \frac{20D\ell}{\ell-D}} \cdot \frac{m(\ell, n)}{n}$$

注：

- ▶ 今から見る証明は ℓ_2^d でなく、 ℓ_p^d に対して同じ結論を導く
- ▶ 「 $\ell \leq 5D$ 」という上界は本質でなく、証明を簡単にするための仮定（「 $5D$ 」の 5 を大きくしたら、「20」を大きくすればよい）

証明の方針：内周の大きなグラフから、本質的に異なるたくさんの距離空間を作成する

定理 7.1 の系

系 7.2

n 個の点からなるすべての距離空間が ℓ_2^d に D -埋め込み可能であるとする
(ただし, D は定数)

- ▶ $D < 3 \Rightarrow d = \Omega(n)$
- ▶ $D < 5 \Rightarrow d = \Omega(n^{1/2})$
- ▶ $D < 7 \Rightarrow d = \Omega(n^{1/3})$

定理 7.1 の系

系 7.2

n 個の点からなるすべての距離空間が ℓ_2^d に D -埋め込み可能であるとする
(ただし, D は定数)

- ▶ $D < 3 \Rightarrow d = \Omega(n)$
- ▶ $D < 5 \Rightarrow d = \Omega(n^{1/2})$
- ▶ $D < 7 \Rightarrow d = \Omega(n^{1/3})$

証明 :

- ▶ 定理 7.1 より, ℓ が定数で, $D < \ell$ のとき, $d = \Omega(m(\ell, n)/n)$

定理 7.1 の系

系 7.2

n 個の点からなるすべての距離空間が ℓ_2^d に D -埋め込み可能であるとする
(ただし, D は定数)

- ▶ $D < 3 \Rightarrow d = \Omega(n)$
- ▶ $D < 5 \Rightarrow d = \Omega(n^{1/2})$
- ▶ $D < 7 \Rightarrow d = \Omega(n^{1/3})$

証明 :

- ▶ 定理 7.1 より, ℓ が定数で, $D < \ell$ のとき, $d = \Omega(m(\ell, n)/n)$
- ▶ $m(3, n) = \Omega(n^2)$, $m(5, n) = \Omega(n^{3/2})$, $m(7, n) = \Omega(n^{4/3})$ より,
系は従う □

定理 7.1 の系

系 7.2

n 個の点からなるすべての距離空間が ℓ_2^d に D -埋め込み可能であるとする
(ただし, D は定数)

- ▶ $D < 3 \Rightarrow d = \Omega(n)$
- ▶ $D < 5 \Rightarrow d = \Omega(n^{1/2})$
- ▶ $D < 7 \Rightarrow d = \Omega(n^{1/3})$

証明 :

- ▶ 定理 7.1 より, ℓ が定数で, $D < \ell$ のとき, $d = \Omega(m(\ell, n)/n)$
- ▶ $m(3, n) = \Omega(n^2)$, $m(5, n) = \Omega(n^{3/2})$, $m(7, n) = \Omega(n^{4/3})$ より,
系は従う □

注

この系は ℓ_2^d だけではなく, ℓ_p^d に対しても成立する

① 歪みと次元の関係

② グラフの用語

③ 歪みと次元の関係：下界

④ l_2 に対する歪みの下界

l_2 に対する歪みの下界

定理 7.3 (Bourgain '85)

n 点から成る距離空間で, l_2 への埋め込みの歪みを

$$c \log n / \log \log n$$

より小さくできないものが存在する (ただし, c は正定数)

注意: この定理では, 次元が出てきていないこと

定理 7.3 の証明 (1)

n 点から成るすべての距離空間が ℓ_2 に D -埋め込み可能であると仮定
(ただし, $D \leq c_1 \log n / \log \log n$, c_1 は自分で選べる十分小さな定数)

定理 7.3 の証明 (1)

n 点から成るすべての距離空間が ℓ_2 に D -埋め込み可能であると仮定
(ただし, $D \leq c_1 \log n / \log \log n$, c_1 は自分で選べる十分小さな定数)

- ▶ $d \leq C_2 \log n$ として, これらは $\ell_2^d \rightarrow 2D$ -埋め込み可能
(C_2 は自分で選べる大きな定数)

(JL 補題)

定理 7.3 の証明 (1)

n 点から成るすべての距離空間が ℓ_2 に D -埋め込み可能であると仮定
(ただし, $D \leq c_1 \log n / \log \log n$, c_1 は自分で選べる十分小さな定数)

- ▶ $d \leq C_2 \log n$ として, これらは $\ell_2^d \rightarrow 2D$ -埋め込み可能
(C_2 は自分で選べる大きな定数) (JL 補題)
- ▶ $\ell = 4D$ とする

定理 7.3 の証明 (1)

n 点から成るすべての距離空間が ℓ_2 に D -埋め込み可能であると仮定
(ただし, $D \leq c_1 \log n / \log \log n$, c_1 は自分で選べる十分小さな定数)

- ▶ $d \leq C_2 \log n$ として, これらは $\ell_2^d \rightarrow 2D$ -埋め込み可能
(C_2 は自分で選べる大きな定数) (JL 補題)
- ▶ $\ell = 4D$ とする
- ▶ $m(\ell, n) \geq \alpha n^{1+\beta/\ell}$ なので (ただし, α, β は自分で選べない定数)

$$m(\ell, n) \geq \alpha n^{1+\frac{\beta}{4D}}$$

定理 7.3 の証明 (1)

n 点から成るすべての距離空間が ℓ_2 に D -埋め込み可能であると仮定
(ただし, $D \leq c_1 \log n / \log \log n$, c_1 は自分で選べる十分小さな定数)

- ▶ $d \leq C_2 \log n$ として, これらは $\ell_2^d \curvearrowright 2D$ -埋め込み可能
(C_2 は自分で選べる大きな定数) (JL 補題)
- ▶ $\ell = 4D$ とする
- ▶ $m(\ell, n) \geq \alpha n^{1+\beta/\ell}$ なので (ただし, α, β は自分で選べない定数)

$$m(\ell, n) \geq \alpha n^{1+\frac{\beta}{4D}} \geq \alpha n^{1+\frac{\beta \log \log n}{4c_1 \log n}}$$

定理 7.3 の証明 (1)

n 点から成るすべての距離空間が ℓ_2 に D -埋め込み可能であると仮定
(ただし, $D \leq c_1 \log n / \log \log n$, c_1 は自分で選べる十分小さな定数)

- ▶ $d \leq C_2 \log n$ として, これらは $\ell_2^d \curvearrowright 2D$ -埋め込み可能
(C_2 は自分で選べる大きな定数) (JL 補題)
- ▶ $\ell = 4D$ とする
- ▶ $m(\ell, n) \geq \alpha n^{1+\beta/\ell}$ なので (ただし, α, β は自分で選べない定数)

$$m(\ell, n) \geq \alpha n^{1+\frac{\beta}{4D}} \geq \alpha n^{1+\frac{\beta \log \log n}{4c_1 \log n}} = \alpha n \log^{4c_1 \frac{\beta}{4c_1}} n$$

事実

$$n^{\frac{\log \log n}{\log n}} = \log n$$

定理 7.3 の証明 (1)

n 点から成るすべての距離空間が ℓ_2 に D -埋め込み可能であると仮定
(ただし, $D \leq c_1 \log n / \log \log n$, c_1 は自分で選べる十分小さな定数)

- ▶ $d \leq C_2 \log n$ として, これらは $\ell_2^d \curvearrowright 2D$ -埋め込み可能
(C_2 は自分で選べる大きな定数) (JL 補題)
- ▶ $\ell = 4D$ とする
- ▶ $m(\ell, n) \geq \alpha n^{1+\beta/\ell}$ なので (ただし, α, β は自分で選べない定数)

$$m(\ell, n) \geq \alpha n^{1+\frac{\beta}{4D}} \geq \alpha n^{1+\frac{\beta \log \log n}{4c_1 \log n}} = \alpha n \log^{\frac{\beta}{4c_1}} n = \alpha n \log^{C_3} n$$

C_3 は自分で選べる十分大きな定数

事実

$$n^{\frac{\log \log n}{\log n}} = \log n$$

定理 7.3 の証明 (2)

▶ \therefore 定理 7.1 より

$$d \geq \frac{1}{\log \frac{20(2D)\ell}{\ell-2D}} \frac{m(\ell, n)}{n}$$

定理 7.3 の証明 (2)

▶ \therefore 定理 7.1 より

$$d \geq \frac{1}{\log \frac{20(2D)\ell}{\ell-2D}} \frac{m(\ell, n)}{n} \geq \frac{1}{\log \frac{40D \cdot 4D}{4D-2D}} \frac{\alpha n \log^{C_3} n}{n}$$

定理 7.3 の証明 (2)

▶ \therefore 定理 7.1 より

$$\begin{aligned} d &\geq \frac{1}{\log \frac{20(2D)\ell}{\ell-2D}} \frac{m(\ell, n)}{n} \geq \frac{1}{\log \frac{40D \cdot 4D}{4D-2D}} \frac{\alpha n \log^{C_3} n}{n} \\ &= \frac{1}{\log 80D} \alpha \log^{C_3} n \end{aligned}$$

定理 7.3 の証明 (2)

▶ \therefore 定理 7.1 より

$$\begin{aligned}
 d &\geq \frac{1}{\log \frac{20(2D)\ell}{\ell-2D}} \frac{m(\ell, n)}{n} \geq \frac{1}{\log \frac{40D \cdot 4D}{4D-2D}} \frac{\alpha n \log^{C_3} n}{n} \\
 &= \frac{1}{\log 80D} \alpha \log^{C_3} n \geq \frac{\alpha}{\log 80(c_1 \log n / \log \log n)} \log^{C_3} n
 \end{aligned}$$

定理 7.3 の証明 (2)

▶ ∴ 定理 7.1 より

$$\begin{aligned}
 d &\geq \frac{1}{\log \frac{20(2D)\ell}{\ell-2D}} \frac{m(\ell, n)}{n} \geq \frac{1}{\log \frac{40D \cdot 4D}{4D-2D}} \frac{\alpha n \log^{C_3} n}{n} \\
 &= \frac{1}{\log 80D} \alpha \log^{C_3} n \geq \frac{\alpha}{\log 80(c_1 \log n / \log \log n)} \log^{C_3} n \\
 &\geq \frac{\alpha}{\log n} \log^{C_3} n
 \end{aligned}$$

定理 7.3 の証明 (2)

▶ ∴ 定理 7.1 より

$$\begin{aligned}
 d &\geq \frac{1}{\log \frac{20(2D)\ell}{\ell-2D}} \frac{m(\ell, n)}{n} \geq \frac{1}{\log \frac{40D \cdot 4D}{4D-2D}} \frac{\alpha n \log^{C_3} n}{n} \\
 &= \frac{1}{\log 80D} \alpha \log^{C_3} n \geq \frac{\alpha}{\log 80(c_1 \log n / \log \log n)} \log^{C_3} n \\
 &\geq \frac{\alpha}{\log n} \log^{C_3} n = \alpha \log^{C_3-1} n
 \end{aligned}$$

定理 7.3 の証明 (2)

▶ \therefore 定理 7.1 より

$$\begin{aligned}
 d &\geq \frac{1}{\log \frac{20(2D)\ell}{\ell-2D}} \frac{m(\ell, n)}{n} \geq \frac{1}{\log \frac{40D \cdot 4D}{4D-2D}} \frac{\alpha n \log^{C_3} n}{n} \\
 &= \frac{1}{\log 80D} \alpha \log^{C_3} n \geq \frac{\alpha}{\log 80(c_1 \log n / \log \log n)} \log^{C_3} n \\
 &\geq \frac{\alpha}{\log n} \log^{C_3} n = \alpha \log^{C_3-1} n
 \end{aligned}$$

▶ $\therefore C_2 \log n < \alpha \log^{C_3-1} n$ ならば矛盾

定理 7.3 の証明 (2)

▶ \therefore 定理 7.1 より

$$\begin{aligned}
 d &\geq \frac{1}{\log \frac{20(2D)\ell}{\ell-2D}} \frac{m(\ell, n)}{n} \geq \frac{1}{\log \frac{40D \cdot 4D}{4D-2D}} \frac{\alpha n \log^{C_3} n}{n} \\
 &= \frac{1}{\log 80D} \alpha \log^{C_3} n \geq \frac{\alpha}{\log 80(c_1 \log n / \log \log n)} \log^{C_3} n \\
 &\geq \frac{\alpha}{\log n} \log^{C_3} n = \alpha \log^{C_3-1} n
 \end{aligned}$$

▶ $\therefore C_2 \log n < \alpha \log^{C_3-1} n$ ならば矛盾

▶ そうなるように C_3 を十分大きく選べばよい □

次の講義の流れ

- ① n 点から成る任意の距離空間が $l_2 \curvearrowright O(\log n)$ -埋め込み可能であることを証明 (Bourgain '85)
- ② n 点から成る距離空間で, $l_2 \curvearrowright$ 埋め込むときの歪みが $\Omega(\log n)$ になるものを構成 (Linial, London, Rabinovich '95, Aumann, Rabani '98)

注 : 定理 7.3 は歪みが $\Omega(\log n / \log \log n)$ になるものが**存在**することしか証明おらず, 具体的な距離空間を**構成**したわけではない

- ① 歪みと次元の関係
- ② グラフの用語
- ③ 歪みと次元の関係：下界
- ④ l_2 に対する歪みの下界