

情報基礎数理学特選  
有限距離空間の離散幾何学とアルゴリズム  
(3) センサネットワーク位置同定問題

岡本 吉央

北陸先端科学技術大学院大学

2011年1月11日

”最終更新：2011/01/10 23:02”

- ▶ 等長埋め込み可能性の応用の1つを見る
  - ▶ センサネットワーク位置同定問題
  - ▶ 半正定値計画緩和
  - ▶ 計算機実験

① センサネットワーク位置同定問題

② 半正定値計画緩和

③ 計算機実験

## センサネットワーク位置同定問題

- ▶ センサが平面上にばらまかれている (動いているかもしれない)
- ▶ センサは自分のいる位置における情報を得る (温度, 日照, ...)
- ▶ センサは他のセンサと通信できるが, 通信範囲は限られている
- ▶ 通信範囲により, センサ同士の距離関係が分かる場合がある

## 解きたい問題

そのような距離情報からセンサの位置を特定できるか?

仮定: 位置の目印となる「アンカ」が存在する

## 問題設定

### 問題設定

既知であるもの

- ▶ アンカの位置
- ▶ いくつかのセンサ-センサ間 (アンカ-センサ間) の距離

計算したいもの

- ▶ すべてのセンサの位置

## 問題設定 (数学的)

## 問題設定

## 既知であるもの

- ▶  $n$  : アンカ, センサの総数
- ▶  $m$  : センサの数
  - ▶  $1, \dots, m$  : センサ
  - ▶  $m+1, \dots, n$  : アンカ
- ▶  $a^i \in \mathbb{R}^2$  : アンカ  $i$  の位置 ( $i = m+1, \dots, n$ )
- ▶  $\mathcal{N} = \{(i, j) \mid i \text{ と } j \text{ の間の距離が既知}\}$
- ▶  $d_{i,j} \in \mathbb{R}$  : センサ (アンカ)  $i$  と センサ (アンカ)  $j$  の間の Euclid 距離

## 計算したいもの

- ▶  $x^i \in \mathbb{R}^2$  : すべてのセンサ  $i = 1, \dots, m$  の位置

## 問題記述

## 問題

次の条件を満たす  $x_i \in \mathbb{R}^2, i \in \{1, \dots, n\}$  があるか判定する  
あるならば, それらを計算する

$$\begin{aligned} \|x^i - x^j\|_2^2 &= d_{i,j}^2 && \text{for all } (i,j) \in \mathcal{N} \\ x^i &= a^i && \text{for all } i = m+1, \dots, n \end{aligned}$$

## 無理矢理，最適化問題として定式化

$$[P] \quad \inf \left\{ 0 \left| \begin{array}{ll} x^i \in \mathbb{R}^2 & \text{for all } i = 1, \dots, m, \\ \|x^i - x^j\|_2^2 = d_{i,j}^2 & \text{for all } (i, j) \in \mathcal{N}, \\ x^i = a^i & \text{for all } i = m+1, \dots, n \end{array} \right. \right\}$$

これをそのまま解くのは難しい

- ▶ そのため，緩和する
- ▶ 緩和するために，この問題を書き換える

① センサネットワーク位置同定問題

② 半正定値計画緩和

③ 計算機実験

## 問題の書き換え

- ▶  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を  $y_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle$  で定義
- ▶  $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  とすると,  $Y = X^\top X$
- ▶ 注意:  $\text{rank}(Y) \leq 2$
- ▶  $\|x^i - x^j\|_2^2 = \|x^i\|_2^2 + \|x^j\|_2^2 - 2\langle x^i, x^j \rangle = y_{i,i} + y_{j,j} - 2y_{i,j}$

## 問題の書き換え

- ▶  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を  $y_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle$  で定義
- ▶  $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  とすると,  $Y = X^\top X$
- ▶ 注意:  $\text{rank}(Y) \leq 2$
- ▶  $\|x^i - x^j\|_2^2 = \|x^i\|_2^2 + \|x^j\|_2^2 - 2\langle x^i, x^j \rangle = y_{i,i} + y_{j,j} - 2y_{i,j}$

## 問題 P の書き換え

$$[P] \quad \inf \left\{ 0 \left| \begin{array}{l} Y - X^\top X = O, \text{rank}(Y) \leq 2, \\ y_{i,i} + y_{j,j} - 2y_{i,j} = d_{i,j}^2 \\ x^i = a^i \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{for all } (i,j) \in \mathcal{N} \\ \text{for all } i = m+1, \dots, n \end{array} \right\}$$

## 問題の書き換え

- ▶  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を  $y_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle$  で定義
- ▶  $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  とすると,  $Y = X^\top X$
- ▶ 注意:  $\text{rank}(Y) \leq 2$
- ▶  $\|x^i - x^j\|_2^2 = \|x^i\|_2^2 + \|x^j\|_2^2 - 2\langle x^i, x^j \rangle = y_{i,i} + y_{j,j} - 2y_{i,j}$

## 問題 P の書き換え

$$[P] \quad \inf \left\{ 0 \left| \begin{array}{l} Y - X^\top X = O, \text{rank}(Y) \leq 2, \\ y_{i,i} + y_{j,j} - 2y_{i,j} = d_{i,j}^2 \\ x^i = a^i \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{for all } (i,j) \in \mathcal{N} \\ \text{for all } i = m+1, \dots, n \end{array} \right\}$$

## この問題を半正定値計画問題に緩和

- ▶ 「 $\text{rank}(Y) \leq 2$ 」を除去
- ▶ 「 $Y - X^\top X = O$ 」を「 $Y - X^\top X \succeq O$ 」に変換

事実:  $Y - X^\top X \succeq O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Y & X^\top \\ X & I \end{pmatrix} \succeq O \in \mathbb{R}^{(n+2) \times (n+2)}$

## 半正定値計画緩和

$$[P] \quad \inf \left\{ 0 \left| \begin{array}{l} Y - X^T X = O, \text{rank}(Y) \leq 2, \\ y_{i,i} + y_{j,j} - 2y_{i,j} = d_{i,j}^2 \\ x^i = a^i \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{for all } (i,j) \in \mathcal{N} \\ \text{for all } i = m+1, \dots, n \end{array} \right\}$$

問題 P の緩和

$$[R] \quad \inf \left\{ 0 \left| \begin{array}{l} Z \succeq O, \\ z_{i,i} + z_{j,j} - 2z_{i,j} = d_{i,j}^2 \\ z_{n+1,i} = a_1^i, z_{i,n+1} = a_1^i \\ z_{n+2,i} = a_2^i, z_{i,n+2} = a_2^i \\ z_{n+1,n+1} = 1, z_{n+1,n+2} = 0, \\ z_{n+2,n+1} = 0, z_{n+2,n+2} = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{for all } (i,j) \in \mathcal{N} \\ \text{for all } i = m+1, \dots, n, \\ \text{for all } i = m+1, \dots, n, \end{array} \right\}$$

これは半正定値計画問題であり、(近似的ではあるが) 解ける

① センサネットワーク位置同定問題

② 半正定値計画緩和

③ 計算機実験

結果については小島政和氏のスライドを参照

- ▶ 小島政和. 半正定値行列補完における双対性とその SDP への応用. 日本オペレーションズリサーチ学会「計算と最適化の新展開」研究部会, 2009 年 3 月.

<http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/articles/SCOPE2009.pdf>

- ① センサネットワーク位置同定問題
- ② 半正定値計画緩和
- ③ 計算機実験