情報基礎数理学特選
有限距離空間の離散幾何学とアルゴリズム
(10) 最疎カット問題

岡本 吉央

北陸先端科学技術大学院大学

2011 年 1 月 14 日

"最終更新：2011/01/14 16:14"

カットの密度

$G = (V, E)$：グラフ，$c \colon E \to \mathbb{R}_+$：辺重み関数，$A \subseteq V$：$G$ のカット

定義：密度

カット A の**密度** (density) とは

$$\frac{c(A, \overline{A})}{|A||\overline{A}|}$$

のこと．ただし，

$$c(A, \overline{A}) = \sum_{\{u,v\} \in E, u \in A, v \in \overline{A}} c(\{u, v\})$$

はカット A の重み (容量) と呼ばれる

最疎カット問題

定義：最疎カット問題

入力： グラフ $G = (V, E)$，辺重み関数 $c \colon E \to \mathbb{R}_+$

出力： G のカット A で，密度最小のもの

$$\min \left\{ \frac{c(A, \overline{A})}{|A||\overline{A}|} \,\middle|\, A \text{ は } G \text{ のカット} \right\}$$

事実 (Matula, Shahrokhi '90)

最疎カット問題は NP 困難

$\leadsto \therefore$ 近似アルゴリズムを考える

近似アルゴリズムのアイディア (Linial, London, Rabinovich '95)

- カットの問題 = カット擬距離の問題
- カット擬距離全体の生成する錐 = ℓ_1 擬距離全体の成す錐
- ℓ_1 擬距離全体の成す錐 $\subseteq$ 擬距離全体の成す錐 (擬距離錐)
- $\therefore$ カットを見つける問題 —緩和 $\rightarrow$ 擬距離を見つける問題
- 擬距離を見つける問題は線形計画問題 (効率よく解ける)
- 見つかった擬距離 —丸め $\rightarrow$ カット
- 丸めるときに，Bourgain の定理を用いる

カット擬距離

X : 有限集合

定義：カット擬距離

X 上のカット擬距離 (cut pseudo-metric) とは，
ある部分集合 $A \subseteq V$ ($A \neq \emptyset, V$) に対して次のように書ける擬距離 δ_A

$$\delta_A(x, y) = \begin{cases} 1 & (x \in A, y \in \overline{A} \text{ または } x \in \overline{A}, y \in A) \\ 0 & (x \in A, y \in A \text{ または } x \in \overline{A}, y \in \overline{A}) \end{cases}$$

最疎カット問題：再定式化

最疎カット問題は次のように言い換えられる

$$\min \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{\{u,v\} \in E} c(u,v)\mu(u,v)}{\displaystyle\sum_{\{u,v\} \in F} \mu(u,v)} \;\middle|\; \mu \text{ は } V \text{ 上のカット擬距離} \right\}$$

ただし，$F = \binom{V}{2}$

最疎カット問題の応用

- 多品種流問題 (multi-commodity flow problem)
  - $c(u, v)$ が $\{u, v\}$ の容量を表す
  - 最疎カット問題の LP への緩和の双対問題が同時多品種流問題 (concurrent multi-commodity flow problem) になる
- ネットワーク最適化 (network optimization)
  - ネットワークに対する分割統治法の適用において，よい分割を与える
- 平衡クラスタリング (balanced clustering)
  - $c(u, v)$ が u と v の類似度を表す
  - 2 つの部分が同程度の要素数になるような分割を見つける
- 画像分割 (image segmentation)
  - 図と地を分離する問題
  - グリッド状グラフの最疎カットを見つける問題になる

1. 最疎カット問題
2. 準備：多面的錐の表現
3. カット擬距離と ℓ_1 距離
4. 線形計画緩和と ℓ_1 距離
5. 最疎カット問題に対する近似アルゴリズム
6. 負タイプの距離と ℓ_1 距離
7. 最疎カット問題：補足

復習：錐，多面体，多面的錐

定義：錐 (復習)

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ が**錐** (cone) であるとは，次の 2 つを満たすこと

1. $x \in C, \lambda \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \lambda x \in C$
2. $x, y \in C \Rightarrow x + y \in C$

定義：多面体 (復習)

集合 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ が**多面体** (polyhedron) であるとは，それが (等号付き) 線形不等式系の解集合であること

定義：多面的錐 (復習)

錐であり，かつ多面体である集合は**多面的錐** (polyhedral cone) と呼ばれる

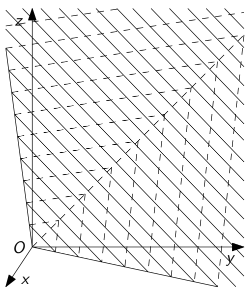
復習：擬距離錐

講義 1 の復習

擬距離錐は多面的錐

有限集合 X 上の擬距離錐は

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^{\binom{X}{2}} \;\middle|\; \begin{array}{ll} x_{\{i,j\}} \ge 0 & \text{for all } i,j \in X, i \neq j, \\ x_{\{i,j\}} \le x_{\{i,k\}} + x_{\{k,j\}} & \text{for all } i,j,k \in X, i \neq j, i \neq k, j \neq k \end{array} \right\}$$

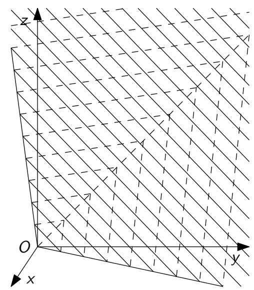


多面的錐の表現 — Minkowski–Weyl の定理

Minkowski–Weyl の定理

多面的錐は

- 原点を境界上に持つ有限個の半空間の共通部分であり，
- 有限個のベクトルの非負線形結合全体の集合である



$(1,1,0)^\top, (1,0,1)^\top, (0,1,1)^\top$ の非負線形結合全体

ℓ_1 擬距離錐の表現

X：有限集合

初日の演習問題

X 上の ℓ_1 等長埋め込み可能擬距離全体は錐を成す (ℓ_1-錐と呼ぶ)

今から行うこと

- X 上の ℓ_1 等長埋め込み可能擬距離は
  X 上のカット擬距離の非負線形結合として表せる
- $\therefore$ X 上の ℓ_1-錐は多面的錐

カット擬距離と ℓ_1 距離

X：有限集合

定理 10.1

X 上の ℓ_1 等長埋め込み可能擬距離は X 上のカット擬距離の非負線形結合である

- そのため，ℓ_1-錐はカット錐 (cut cone) とも呼ばれる
- 証明は 2 段階に分かれる
  1. ℓ_1 等長埋め込み可能擬距離は
     ℓ_1^1 等長埋め込み可能擬距離の非負線形結合である
  2. ℓ_1^1 等長埋め込み可能擬距離はカット擬距離の非負線形結合である

ℓ_1^d と ℓ_1^1

主張 1

設定：

- (X, μ)：ℓ_1^d 等長埋め込み可能擬距離空間

主張の結論：

- d 個の ℓ_1^1 等長埋め込み可能擬距離空間 $(X, \mu_1), \dots, (X, \mu_d)$ が存在して

$$\mu = \sum_{i=1}^{d} \mu_i$$

主張 1 の証明

- $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^d$: (X,μ) の ℓ_1^d 等長埋め込みとする
- ここで，$\varphi_i\colon X \to \mathbb{R}$: (X,μ_i) の ℓ_1^1 等長埋め込みを次のように作成

$$\varphi_i(x) = \varphi(x)_i \qquad (\varphi(i) \text{ の第 } i \text{ 座標})$$

- よって

$$\mu(x,y) = \sum_{i=1}^{d} |\varphi(x)_i - \varphi(y)_i| = \sum_{i=1}^{d} |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| = \sum_{i=1}^{d} \mu_i(x,y)$$

□

ℓ_1^1 とカット擬距離

主張 2

設定：

- (X,μ) : ℓ_1^1 等長埋め込み可能擬距離空間，$|X| = n$

主張の結論：

- $n-1$ 個のカット擬距離 $(X,\mu_1),\ldots,(X,\mu_{n-1})$ と $n-1$ 個の非負実数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ が存在して

$$\mu = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mu_i$$

主張 2 の証明 (1)

$X = \{1,2,\ldots,n\}$ とする

- $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$: ℓ_1^1 等長埋め込みとする
- 一般性を失わず，$\varphi(1) \le \varphi(2) \le \cdots \le \varphi(n)$
- このとき，$i = 1,\ldots,n-1$ に対して

$$\begin{aligned}\delta_i &= \delta_{\{1,\ldots,i\}}\\ \lambda_i &= \varphi(i+1) - \varphi(i)\end{aligned}$$

とする．つまり，任意の $x,y \in X$ に対して

$$\delta_i(x,y) = \begin{cases} 1 & (x \le i < y \text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

主張 2 の証明 (2)

$i \ne j \in X$ に対して (ただし，$\varphi(i) \le \varphi(j)$ とする)

$$\begin{aligned}\mu(i,j) &= \varphi(j) - \varphi(i)\\ &= \sum_{k=j-1}^{i} (\varphi(k+1) - \varphi(k))\\ &= \sum_{k=j-1}^{i} \lambda_k\\ &= \sum_{i \le k < j} \lambda_k\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \delta_k(i,j)\end{aligned}$$

□

カット擬距離と ℓ_1 距離

X：有限集合

定理 10.1 (再掲)

X 上の ℓ_1 等長埋め込み可能擬距離は X 上のカット擬距離の非負線形結合である

証明の帰結

有限な $X \subseteq \ell_1^d$ が与えられたとき，
その距離に対するカット擬距離の非負線形結合による表現を
多項式時間で計算可能
(特に，使用するカット擬距離の数 $\leq d(|X|-1)$)

「カット擬距離」を「ℓ_1 距離」に緩和

$G=(V,E)$：グラフ，$c\colon E \to \mathbb{R}_+$：辺重み関数，$F=\binom{V}{2}$

- 最疎カット問題 P

$$\min\left\{ \frac{\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\mu(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in F} \mu(u,v)} \;\middle|\; \mu \text{ は } V \text{ 上のカット擬距離} \right\}$$

- その緩和 R(ℓ_1)

$$\inf\left\{ \frac{\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\mu(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in F} \mu(u,v)} \;\middle|\; \mu \in V \text{ 上の } \ell_1\text{-錐} \right\}$$

R(ℓ_1) に最適解は存在する

分母を 1 に限定した問題 R'(ℓ_1)

$$\inf\left\{ \sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\mu(u,v) \;\middle|\; \begin{array}{l}\mu \in V \text{ 上の } \ell_1\text{-錐},\\ \sum_{\{u,v\}\in F} \mu(u,v) = 1\end{array} \right\}$$

- R'(ℓ_1) の許容解は R(ℓ_1) の許容解
- R(ℓ_1) の許容解 μ に対して，$\mu' = \mu / \sum_{\{u,v\}\in F} \mu(u,v)$ は R'(ℓ_1) の許容解で，目的関数値は等しい

$$\frac{\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\mu(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in F} \mu(u,v)} = \sum_{\{u,v\}\in E} \frac{c(u,v)\mu(u,v)}{\sum_{\{x,y\}\in F} \mu(x,y)} = \sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\mu'(u,v)$$

- $\therefore$ R(ℓ_1) の最適解は存在する　($\because$ R'(ℓ_1) の許容領域は有界閉集合)

最疎カット問題と緩和 R(ℓ_1) は同程度に難しい

命題 10.3

最疎カット問題 P の最適値 $=$ 緩和 R(ℓ_1) の最適値

証明：

- P の最適値 $\geq$ R(ℓ_1) の最適値 $\quad$ ($\because$ R(ℓ_1) は P の緩和)
- μ : R(ℓ_1) の最適解
- μ を V 上のカット擬距離の非負線形結合として表現：$\mu = \sum_{A \subseteq V} \lambda_A \delta_A$
- R(ℓ_1) の最適値

$$= \frac{\sum_{\{u,v\} \in E} c(u,v)\mu(u,v)}{\sum_{\{u,v\} \in F} \mu(u,v)} = \frac{\sum_{\{u,v\} \in E} c(u,v) \sum_{A \subseteq V} \lambda_A \delta_A(u,v)}{\sum_{\{u,v\} \in F} \sum_{A \subseteq V} \lambda_A \delta_A(u,v)}$$

命題 10.3 の証明 (続)

$$\frac{\sum_{\{u,v\} \in E} c(u,v) \sum_{A \subseteq V} \lambda_A \delta_A(u,v)}{\sum_{\{u,v\} \in F} \sum_{A \subseteq V} \lambda_A \delta_A(u,v)} = \frac{\sum_{A \subseteq V} \lambda_A \sum_{\{u,v\} \in E} c(u,v)\delta_A(u,v)}{\sum_{A \subseteq V} \lambda_A \sum_{\{u,v\} \in F} \delta_A(u,v)}$$

$$\geq \min_{A \subseteq V} \left\{ \frac{\sum_{\{u,v\} \in E} c(u,v)\delta_A(u,v)}{\sum_{\{u,v\} \in F} \delta_A(u,v)} \right\} = \text{P の最適値}$$

よって，P の最適値 $=$ R(ℓ_1) の最適値 □

事実

正実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ に対して

$$\frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n}{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n} \geq \min \left\{ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \right\}$$

R(ℓ_1) をもっと緩和する

$G = (V, E)$: グラフ，$c \colon E \to \mathbb{R}_+$: 辺重み関数，$F = \binom{V}{2}$

- 最疎カット問題 P

$$\min \left\{ \frac{\sum_{\{u,v\} \in E} c(u,v)\mu(u,v)}{\sum_{\{u,v\} \in F} \mu(u,v)} \;\middle|\; \mu \text{ は } V \text{ 上のカット擬距離} \right\}$$

- その緩和 R(ℓ_1)

$$\inf \left\{ \frac{\sum_{\{u,v\} \in E} c(u,v)\mu(u,v)}{\sum_{\{u,v\} \in F} \mu(u,v)} \;\middle|\; \mu \in \ V \text{ 上の } \ell_1\text{-錐} \right\}$$

- P と R(ℓ_1) の最適値が変わらないということは，R(ℓ_1) の難しさは P と同程度 (つまり，R(ℓ_1) も NP 困難)
- $\therefore$ R(ℓ_1) をさらに緩和

距離緩和

- そのまた緩和 R(MET) $\quad$ (距離緩和 (metric relaxation))

$$\inf \left\{ \frac{\sum_{\{u,v\} \in E} c(u,v)\mu(u,v)}{\sum_{\{u,v\} \in F} \mu(u,v)} \;\middle|\; \mu \in \ V \text{ 上の擬距離錐} \right\}$$

- 次の最適化問題 R'(MET) は R(MET) と同じ最適値を持つ

$$\inf \left\{ \sum_{\{u,v\} \in E} c(u,v)\mu(u,v) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu \in \ V \text{ 上の擬距離錐}, \\ \sum_{\{u,v\} \in F} \mu(u,v) = 1 \end{array} \right\}$$

これは線形計画問題 $\rightsquigarrow$ 多項式時間で解ける

最疎カット問題に対する近似アルゴリズム A

(Linial, London, Rabinovich '95)

1. 線形緩和問題 R(MET) を解く
   $\rightsquigarrow$ R(MET) の最適解として擬距離 μ が得られる
2. μ を $\ell_1^{O(\log^2 n)}$ に歪み $O(\log n)$ で埋め込む (a là Bourgain)
   $\rightsquigarrow$ ℓ_1 距離 μ' も得られる
3. μ' をカット擬距離の非負線形結合として表す $(N \leq O(n \log^2 n))$

$$\mu' = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \delta_i$$

4. 対応するカットの中で密度が一番小さいものを出力

全体は多項式時間で終了する

アルゴリズム A の近似精度

定理 10.4 (Linial, London, Rabinovich, '95)

任意のグラフ G と非負辺重み関数 $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して
密度最小カットを A^* としたとき，

$$\frac{c(A^*, \overline{A^*})}{|A^*||\overline{A^*}|} \leq \frac{c(A, \overline{A})}{|A||\overline{A}|} \leq O(\log n) \frac{c(A^*, \overline{A^*})}{|A^*||\overline{A^*}|}$$

を満たすカット A をアルゴリズム A は発見する (n はグラフの頂点数)

定理 10.4 の証明

$$\frac{c(A,\overline{A})}{|A||\overline{A}|} = \min_{i=1,\dots,N} \frac{\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\delta_i(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in F} \delta_i(u,v)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\delta_i(u,v)\right)}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(\sum_{\{u,v\}\in F} \delta_i(u,v)\right)}$$

$$= \frac{\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i\delta_i(u,v)\right)}{\sum_{\{u,v\}\in F} \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i\delta_i(u,v)\right)} = \frac{\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\mu'(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in F} \mu'(u,v)}$$

$$= \frac{\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\mu'(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in F} \mu'(u,v)} = \frac{\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)O(\log n)\mu(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in F} \mu(u,v)}$$

定理 10.4 の証明 (続)

$$\begin{aligned}\frac{c(A,\overline{A})}{|A||\overline{A}|} &\leq \frac{\displaystyle\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)O(\log n)\mu(u,v)}{\displaystyle\sum_{\{u,v\}\in F} \mu(u,v)} \\ &= O(\log n)\frac{\displaystyle\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\mu(u,v)}{\displaystyle\sum_{\{u,v\}\in F} \mu(u,v)} \\ &\leq O(\log n)\frac{c(A^*,\overline{A^*})}{|A^*||\overline{A^*}|} \qquad \square\end{aligned}$$

近似精度を改善したい

アルゴリズム A のやっていたこと

- 「$\mu \in \ell_1$ 錐」という条件を「$\mu \in$ 擬距離錐」に緩和
- Bourgain による低歪み埋め込みを用いて，距離の丸め

改善のポイント

- 「擬距離錐」に緩和してしまったのは，緩くし過ぎ
- ℓ_1 錐よりは大きく，擬距離錐よりは狭い距離のクラスに緩和できないか？

「負タイプの距離」はそのような距離になっている

負タイプの距離

定義：負タイプの距離

距離空間 (X,μ) が**負タイプ** (negative-type) であるとは，
$(X,\sqrt{\mu})$ が ℓ_2 等長埋め込み可能距離空間であること

つまり，$\varphi\colon X \to \mathbb{R}^d$ で

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu}(x,y) &= \|\varphi(x)-\varphi(y)\|_2 \\ (\text{(すなわち)}\quad \mu(x,y) &= \|\varphi(x)-\varphi(y)\|_2^2) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する

負タイプの距離の性質

事実

X：有限集合 (任意)

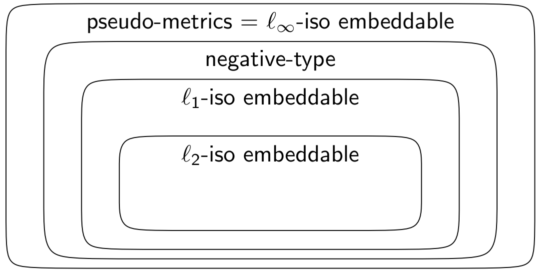
- X 上の負タイプの距離全体の集合は錐を成す
- X 上の与えられた距離 μ が負タイプであるかどうかは多項式時間で分かる (μ から作られる行列の半正定値性)

つまり，負タイプの距離の中である線形関数を最小化する問題は半正定値計画問題となる

負タイプの距離と ℓ_1 距離

命題 10.5

ℓ_1 等長埋め込み可能擬距離空間は負タイプ



命題 10.5 の証明をするための補題を準備

(X, μ)：有限距離空間，$X = \{1, \ldots, n\}$

補題 10.6

実数 $b_1, \ldots, b_n$ で $\sum_{i=1}^n b_i = 0$ を満たす任意のものに対して，

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j \mu(i,j) \leq 0$$

が成り立つ $\Rightarrow$ (X, μ) は負タイプ

証明：次の行列 $M \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ の半正定値性を示せばよい

$$m_{i,j} = \mu(i,n) + \mu(j,n) - \mu(i,j)$$

- 任意の $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して，$x^\top Mx \geq 0$ が成り立つことを示す

補題 10.6 の証明 (続)

$$\begin{aligned}
x^\top Mx &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x_i x_j m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x_i x_j (\mu(i,n) + \mu(j,n) - \mu(i,j)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x_i x_j \mu(i,n) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x_i x_j \mu(j,n) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x_i x_j \mu(i,j) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \mu(i,n)\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j \mu(j,n)\right) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x_i x_j \mu(i,j) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \mu(i,n)\right)(-x_n) + (-x_n)\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j \mu(j,n)\right) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x_i x_j \mu(i,j)
\end{aligned}$$

(ただし，$x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i$)

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \mu(i,j) \geq 0 \qquad \square$$

命題 10.5 の証明

- カット擬距離が負タイプであることを証明すれば十分
  - $\because$ ℓ_1 距離はカット擬距離の非負結合で，負タイプ距離は錐を成す
- カット擬距離 δ_A を考える $(A \subseteq X = \{1, \ldots, n\})$
- $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$ を満たす $b_1, \ldots, b_n$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j \delta_A(i,j) &= 2\sum_{i\in A}\sum_{j\notin A} b_i b_j \\ &= 2\left(\sum_{i\in A} b_i\right)\left(\sum_{j\notin A} b_j\right) \leq 0\end{aligned}$$

- 補題 10.6 より，δ_A は負タイプ $\square$

負タイプ距離緩和

$G = (V, E)$：グラフ，$c\colon E \to \mathbb{R}_+$：辺重み関数，$F = \binom{V}{2}$

- 最疎カット問題 P

$$\min\left\{\frac{\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\mu(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in F} \mu(u,v)} \;\middle|\; \mu \text{ は } V \text{ 上のカット擬距離}\right\}$$

- その緩和 R(NEG)

$$\inf\left\{\frac{\sum_{\{u,v\}\in E} c(u,v)\mu(u,v)}{\sum_{\{u,v\}\in F} \mu(u,v)} \;\middle|\; \mu \in V \text{ 上の負タイプ擬距離錐}\right\}$$

- これは半正定値計画問題 $\rightsquigarrow$ 多項式時間で定数倍近似可能
- R(NEG) の最適解 (負タイプ擬距離) が ℓ_1 に低歪みで埋め込めるとうれしい

負タイプ距離の低歪み埋め込み可能性：ℓ_2 へ

$n =$ 考えている距離空間の点の数

事実

- 任意の負タイプ距離空間は ℓ_2 に歪み $O(\log^{3/4} n)$ で埋め込める
  (Chawla, Gupta, Räcke '08)
- 任意の負タイプ距離空間は ℓ_2 に歪み $O(\sqrt{\log n}\log\log n)$ で埋め込める
  (Arora, Lee, Naor '07, '07)
- 任意の負タイプ距離空間は ℓ_2 に歪み $O(\sqrt{\log n \log\log n})$ で埋め込める (と証明されたようだが，詳細不明)
  (Lee)
- 負タイプ距離空間で，ℓ_2 への埋め込みの歪みが $\Omega(\sqrt{\log n})$ になるものが存在する
  (Hamming 立方体，Enflo '69)

負タイプ距離の低歪み埋め込み可能性：ℓ_1 へ

でも，ℓ_2 に埋め込むのではなく，ℓ_1 に埋め込めれば十分

事実

- 負タイプ距離空間で，ℓ_1 への埋め込みの歪みが $\Omega(\log\log^{1/4-\varepsilon} n)$ になるものが存在する
  (Khot, Vishnoi '05, Mossel, O'Donnell, Oleszkiewicz '10)
  - 「任意の負タイプ距離空間が ℓ_1 に歪み $O(1)$ で埋め込める」という Goemans–Linial 予想に対する反例
- 負タイプ距離空間で，ℓ_1 への埋め込みの歪みが $\Omega(\log\log n)$ になるものが存在する
  (Krauthgamer, Rabani '09)
- 別の例 (Lee, Naor '06)

最疎カット問題に対する近似アルゴリズム B

(Arora, Lee, Naor '07 の改変)

1. 半正定値計画緩和問題 R(NEG) を解く
   $\rightsquigarrow$ R(NEG) の定数近似最適解として負タイプ距離 μ が得られる
2. μ を ℓ_2^n に最適歪みで埋め込む (半正定値計画問題)
   $\rightsquigarrow$ ℓ_2 距離 μ' も得られる
3. μ' を $\ell_1^{O(n)}$ に定数歪みで埋め込む (既知結果)
   $\rightsquigarrow$ ℓ_1 距離 μ'' も得られる
4. μ'' をカット擬距離の非負線形結合として表す ($N \leq O(n^2)$)

$$\mu'' = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \delta_i$$

5. 対応するカットの中で密度が一番小さいものを出力

- 全体は多項式時間で終了する
- 近似精度は埋め込みの歪み $= O(\sqrt{\log n} \log\log n)$

アルゴリズム B の近似精度

いままでの議論から次の定理の成立が分かる

定理 10.7 (Arora, Lee, Naor '07)

任意のグラフ G と非負辺重み関数 $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して
密度最小カットを A^* としたとき,

$$\frac{c(A^*, \overline{A^*})}{|A^*||\overline{A^*}|} \leq \frac{c(A, \overline{A})}{|A||\overline{A}|} \leq O(\sqrt{\log n} \log\log n)\frac{c(A^*, \overline{A^*})}{|A^*||\overline{A^*}|}$$

を満たすカット A をアルゴリズム B は発見する (n はグラフの頂点数)

最疎カット問題：補足

多項式時間で達成できる近似精度：

- $O(\sqrt{\log n})$ が可能 (Arora, Rao, Varizani '09, Lee '05)
- 手法は同じく負タイプ距離への緩和に基づく
  (しかし，丸め方が違う)

参考文献：近似アルゴリズム設計

- V. Vazirani. Approximation Algorithms. Corrected Second Printing. Springer, 2003.
- D. P. Williamson, D. B. Shmoys. The Design of Approximation Algorithms. Cambridge University Press, 2011. http://www.designofapproxalgs.com/

1. 最疎カット問題
2. 準備：多面的錐の表現
3. カット擬距離と ℓ_1 距離
4. 線形計画緩和と ℓ_1 距離
5. 最疎カット問題に対する近似アルゴリズム
6. 負タイプの距離と ℓ_1 距離
7. 最疎カット問題：補足