情報基礎数理学特選
有限距離空間の離散幾何学とアルゴリズム
(9) 低歪み埋め込み可能性：エクスパンダに対する下界

岡本 吉央

北陸先端科学技術大学院大学

2011 年 1 月 13 日

"最終更新：2011/01/12 23:28"

今から行うこと

流れ (遡行)

- Bourgain の定理がタイトであることを示す
  特に，ℓ_2 への埋め込みの歪みが $\Omega(\log n)$ になる具体例を与える (この講義)
- その準備として，
  ℓ_2 への埋め込みの歪みが $\Omega(\sqrt{\log n})$ になる具体例を与える (前の講義)
- 具体例はなかったが，$\Omega(\log n/\log\log n)$ は示した (前の前の講義)

定理 9.1 (Linial, London, Rabinovich '95, Aumann, Rabani '98)

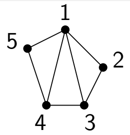
頂点数 n のエクスパンダ上の最短パス距離が ℓ_2 へ D-埋め込み可能
$\Rightarrow D = \Omega(\log n)$

次数

$G = (V, E)$：グラフ

定義：次数

頂点 $v \in V$ の次数 (degree) とは，v に隣接する頂点の数のこと
($\deg_G(v)$ で表す)



- $\deg_G(1) = 4$
- $\deg_G(2) = \deg_G(5) = 2$
- $\deg_G(3) = \deg_G(4) = 3$

定義：正則グラフ

r 正則グラフ (r-regular graph) とは，すべての頂点の次数が r であるグラフ

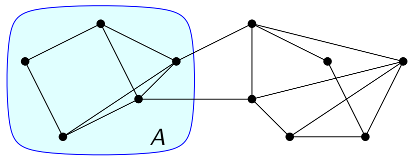
カット

$G = (V, E)$：グラフ

定義：カット

G のカット (cut) とは頂点集合 $A \subseteq V$ ($A \neq \emptyset, V$) のことで，
その容量 (capacity) とは，A と $V \setminus A$ の間を結ぶ G の辺の数

$$e(A, V \setminus A) = |\{\{u, v\} \in E \mid u \in A, v \in V \setminus A\}|$$



$e(A, V \setminus A) = 2$

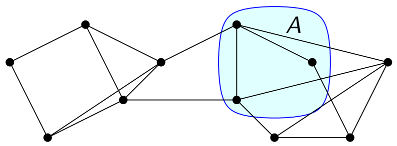
辺伸張

$G = (V, E)$：グラフ

定義：辺伸張

G の辺伸張 (edge expansion) とは次の値のこと

$$\Phi(G) = \min \left\{ \frac{e(A, V \setminus A)}{|A|} \,\middle|\, A \subseteq V, 1 \leq |A| \leq \frac{1}{2}|V| \right\}$$



$\frac{e(A, V \setminus A)}{|A|} = \frac{6}{3}$

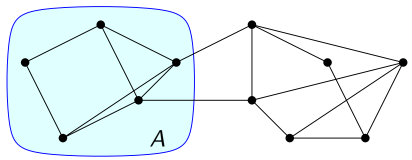
辺伸張

$G = (V, E)$：グラフ

定義：辺伸張

G の辺伸張 (edge expansion) とは次の値のこと

$$\Phi(G) = \min \left\{ \frac{e(A, V \setminus A)}{|A|} \,\middle|\, A \subseteq V, 1 \leq |A| \leq \frac{1}{2}|V| \right\}$$



$\Phi(G) = \frac{e(A, V \setminus A)}{|A|} = \frac{2}{5}$

エクスパンダ

$r \geq 3$：自然数 (固定)

定義：エクスパンダ

r 正則グラフの無限族 $\{G_1, G_2, \dots\}$ で

$$|V(G_1)| < |V(G_2)| < \cdots$$

を満たすものがエクスパンダ (expander) の族であるとは，
ある定数 $\beta > 0$ が存在して

$$\Phi(G_i) \geq \beta$$

が任意の正整数 i に対して成り立つこと

エクスパンダの構成

エクスパンダの構成はグラフ理論・計算理論における大きな関心事

- Margulis '73
- Lubotzky, Phillips, Sarnak '88
- Alon, Roichman '94
- Reingold, Vadhan, Wigderson '02
- ...

重要なサーベイ論文

- S. Hoory, N. Linial, A. Wigderson. Expander graphs and their applications. Bulletin of the American Mathematical Society 43 (2006) 439–561.

ここからの流れ

- グラフの固有値を定義
  - そのために，グラフの Laplace 行列を定義
- グラフの固有値とグラフの辺伸張の関係を観察

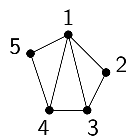
グラフの Laplace 行列

$G = (V, E)$：グラフ

定義：Laplace 行列

G の Laplace 行列 (Laplacian) とは，$L_G \in \mathbb{R}^{V \times V}$ で，

$$(L_G)_{u,v} = \begin{cases} \deg_G(u) & (u = v \text{ のとき}) \\ -1 & (u \neq v \text{ かつ } \{u,v\} \in E \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$



$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Laplace 行列の性質

$G=(V,E)$：グラフ，$n=|V|$，$L_G \in \mathbb{R}^{V\times V}$：$G$ の Laplace 行列

観察 1 (演習問題)

L_G は対称半正定値

- $\therefore$ すべての固有値は非負実数
- $\lambda_1(G) \le \lambda_2(G) \le \cdots \le \lambda_n(G)$：$L_G$ の固有値

観察 2

$\lambda_1(G)=0$

観察 2 の証明：$x=(1,1,\dots,1)^\top \in \mathbb{R}^V$ に対して

$$(L_G x)_v = \deg_G(v) - \sum_{u:\{u,v\}\in E} 1 = \deg_G(v) - \deg_G(v) = 0$$

よって，x は L_G の固有ベクトルであり，対応する固有値は 0 $\square$

Rayleigh 商と第二固有値

事実 (あるいは復習)

行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の最小固有値 λ_1 とそれに付随する固有ベクトル v_1 に対して，第二固有値 λ_2 は

$$\lambda_2 = \min\left\{\frac{x^\top Ax}{x^\top x} \middle| x \in \mathbb{R}^n, x \perp v_1\right\}$$

を満たす

Laplace 行列 $L_G \in \mathbb{R}^{V\times V}$ に適用すると，次が得られる (演習問題)

$$\lambda_2(G) = \min\left\{\frac{\sum_{\{u,v\}\in E}(x_u-x_v)^2}{\sum_{v\in V} x_v^2} \middle| x \in \mathbb{R}^V, \sum_{v\in V} x_v = 0\right\}$$

第二固有値と辺伸張の関係

命題 9.1

任意のグラフ G に対して，

$$\lambda_2(G) \le 2\Phi(G)$$

つまり，

- $\lambda_2(G) \ge \beta \Rightarrow \Phi(G) \ge \beta/2$

備忘録

$$\Phi(G) = \min\left\{\frac{e(A, V\setminus A)}{|A|} \middle| A \subseteq V, 1 \le |A| \le \frac{1}{2}|V|\right\}$$

r 正則グラフ G に対して，$\lambda_2(G) \ge \frac{\Phi(G)^2}{2r}$ も知られている
(Dodziuk '84, Alon, Milman '85, Alon '86)

命題 9.1 の証明 (1)

証明すること

$$\lambda_2(G) \le 2\Phi(G)$$

- A^*：$\Phi(G)$ を与える最適化問題の最適解
- $\overline{A^*} = V \setminus A^*$
- $x^* \in \mathbb{R}^V$ を次で定義

$$x^*_v = \begin{cases} -|\overline{A^*}| & (v \in A^* \text{ のとき}) \\ |A^*| & (v \in \overline{A^*} \text{ のとき}) \end{cases}$$

- $\lambda_2(G) \le \dfrac{\sum_{\{u,v\}\in E}(x^*_u - x^*_v)^2}{\sum_{v\in V}(x^*_v)^2}$

命題 9.1 の証明 (2)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\{u,v\}\in E}(x_u^*-x_v^*)^2\\
&= \sum_{\substack{\{u,v\}\in E,\\ u\in A^*, v\in\overline{A^*}}}(x_u^*-x_v^*)^2+\sum_{\substack{\{u,v\}\in E,\\ u,v\in A^*}}(x_u^*-x_v^*)^2+\sum_{\substack{\{u,v\}\in E,\\ u,v\in\overline{A^*}}}(x_u^*-x_v^*)^2\\
&= \sum_{\substack{\{u,v\}\in E,\\ u\in A^*, v\in\overline{A^*}}}(-|\overline{A^*}|-|A^*|)^2+\sum_{\substack{\{u,v\}\in E,\\ u,v\in A^*}}(-|\overline{A^*}|+|\overline{A^*}|)^2+\sum_{\substack{\{u,v\}\in E,\\ u,v\in\overline{A^*}}}(|A^*|-|A^*|)^2\\
&= \sum_{\substack{\{u,v\}\in E,\\ u\in A^*, v\in\overline{A^*}}}(|A^*|+|\overline{A^*}|)^2\\
&= C(A^*,\overline{A^*})(|A^*|+|\overline{A^*}|)^2
\end{aligned}
$$

命題 9.1 の証明 (3)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{v\in V}(x_v^*)^2\\
&= \sum_{v\in A^*}(x_v^*)^2+\sum_{v\in\overline{A^*}}(x_v^*)^2\\
&= \sum_{v\in A^*}(-|\overline{A^*}|)^2+\sum_{v\in\overline{A^*}}|A^*|^2\\
&= |A^*||\overline{A^*}|^2+|\overline{A^*}||A^*|^2\\
&= |A^*||\overline{A^*}|(|\overline{A^*}|+|A^*|)
\end{aligned}
$$

命題 9.1 の証明 (4)

$$
\begin{aligned}
\therefore \lambda_2(G) &\le \frac{\displaystyle\sum_{\{u,v\}\in E}(x_u^*-x_v^*)^2}{\displaystyle\sum_{v\in V}(x_v^*)^2} = \frac{C(A^*,\overline{A^*})(|A^*|+|\overline{A^*}|)^2}{|A^*||\overline{A^*}|(|A^*|+|\overline{A^*}|)}\\
&= C(A^*,\overline{A^*})\frac{|A^*|+|\overline{A^*}|}{|A^*||\overline{A^*}|}\\
&\le C(A^*,\overline{A^*})\frac{2\max\{|A^*|,|\overline{A^*}|\}}{|A^*||\overline{A^*}|}\\
&= 2\frac{C(A^*,\overline{A^*})}{\min\{|A^*|,|\overline{A^*}|\}} = 2\Phi(G) \qquad \square
\end{aligned}
$$

事実

$\forall$ **正実数** a, b : $a+b \le 2\max\{a,b\}$, $\dfrac{\max\{a,b\}}{ab} = \dfrac{1}{\min\{a,b\}}$

エクスパンダを用いた ℓ_2 への埋め込みの歪みに対する下界

定理 9.2 (Linial, London, Rabinovich '95, Aumann, Rabani '98)

設定

- $r \geq 3$：定数，$\beta > 0$：定数
- $G = (V, E)$：r 正則グラフで，$\mu_2(G) \geq \beta$ を満たすもの
- (V, ρ)：G 上の最短パス距離空間
- $f\colon V \to \ell_2$：D-埋め込み

結論

- $\exists\, c > 0$: $D \geq c \log n$

つまり，頂点数 n のエクスパンダに対して D の下界 $\Omega(\log n)$ が得られる

定理 9.2 の証明 (1)：記法 (再掲)

設定

- (X, μ), (X, ν)：距離空間
- $E, F \subseteq \binom{X}{2}$：$X$ の要素数 2 の部分集合の集まり (非空)

記法

- $\mathrm{ave}_2(\mu, E) = \sqrt{\dfrac{1}{|E|} \displaystyle\sum_{\{x,y\} \in E} \mu(x, y)^2}$ (二乗平均平方根)
- $R_{E,F}(\mu) = \dfrac{\mathrm{ave}_2(\mu, F)}{\mathrm{ave}_2(\mu, E)}$

定理 9.2 の証明 (2)

$G = (V, E)$：定理の仮定を満たすグラフ

- $F = \binom{V}{2}$ とする
- μ：G 上の最短パス距離
- D-埋め込み $f\colon V \to \ell_2^d$ に対して，$\nu(x, y) = \|f(x) - f(y)\|_2$ とする
- $R_{E,F}(\mu) \leq D \cdot R_{E,F}(\nu)$ (定理 8.2 の証明参照)

今から示すこと

1. $R_{E,F}(\mu) = \Omega(\log n)$
2. $R_{E,F}(\nu) = O(1)$

これらを示せば，証明が完了

定理 9.2 の証明 (3)：$R_{E,F}(\mu) = \Omega(\log n)$ の証明 (1)

- $\mathrm{ave}_2(\mu, E) = \sqrt{\dfrac{1}{|E|} \displaystyle\sum_{\{u,v\} \in E} \mu(u, v)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{|E|} \displaystyle\sum_{\{u,v\} \in E} 1} = 1$
- $\therefore$ $\mathrm{ave}_2(\mu, F) = \Omega(\log n)$ を証明すれば十分
- $v_0 \in V$：任意 (固定)
- $V_i = \{v \in V \mid \mu(v_0, v) = i\}$ とする
- $|V_0| = 1$ $(\because V_0 = \{v_0\})$
- $|V_i| \leq r|V_{i-1}|$ $(i \geq 1)$ $(\because$ G は r 正則$)$
- $\therefore |V_i| \leq r^i$ $(i \geq 1)$
- $|V_0| + \cdots + |V_k| = 1 + \cdots + r^k \leq r^{k+1}$
- $k = \log_r(\frac{n}{2}) - 1$ とすると，$r^{k+1} = \frac{n}{2}$
- $\therefore |\{v \in V \mid \mu(v_0, v) > k\}| \geq \frac{n}{2}$
- $\therefore |\{\{u, v\} \in \binom{V}{2} \mid \mu(u, v) > k\}| \geq \frac{n^2}{4}$

定理 9.2 の証明 (4)：$R_{E,F}(\mu) = \Omega(\log n)$ の証明 (2)

$$\mathrm{ave}_2(\mu, F) = \sqrt{\frac{1}{|F|}\sum_{\{u,v\}\in F} \mu(u,v)^2} = \sqrt{\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{\{u,v\}\in\binom{V}{2}} \mu(u,v)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{\substack{\{u,v\}\in\binom{V}{2},\\ \mu(u,v)\le k}} \mu(u,v)^2 + \sum_{\substack{\{u,v\}\in\binom{V}{2},\\ \mu(u,v)>k}} \mu(u,v)^2\right)}$$

$$\ge \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}\sum_{\substack{\{u,v\}\in\binom{V}{2},\\ \mu(u,v)>k}} \mu(u,v)^2}$$

$$> \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}\sum_{\substack{\{u,v\}\in\binom{V}{2},\\ \mu(u,v)>k}} k^2} \ge \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}\frac{n^2}{4}k^2} = \Omega(k) = \Omega(\log n)$$

定理 9.2 の証明 (5)：$R_{E,F}(\nu) = O(1)$ の証明 (1)

主張

任意の n 個の実数 $x_v, v \in V$ に対して

$$\sum_{\{u,v\}\in\binom{V}{2}} (x_u - x_v)^2 = O(n) \sum_{\{u,v\}\in E} (x_u - x_v)^2$$

主張の証明：一般性を失わずに $\sum_{v\in V} x_v = 0$ を仮定 (平行移動すればよい)

- $$\sum_{\{u,v\}\in\binom{V}{2}} (x_u - x_v)^2 = n\sum_{v\in V} x_v^2 - \left(\sum_{v\in V} x_v\right)^2 \quad \text{(演習問題)}$$
  $$= n\sum_{v\in V} x_v^2$$
- $$\sum_{\{u,v\}\in E} (x_u - x_v)^2 \ge \lambda_2(G)\sum_{v\in V} x_v^2 \ge \beta \textstyle\sum_{v\in V} x_v^2$$ □

定理 9.2 の証明 (6)：$R_{E,F}(\nu) = O(1)$ の証明 (2)

$$\mathrm{ave}_2(\nu, F) = \sqrt{\frac{1}{|F|}\sum_{\{u,v\}\in F} \nu(u,v)^2} = \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}\sum_{\{u,v\}\in\binom{V}{2}} \|f(u)-f(v)\|_2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}\sum_{\{u,v\}\in\binom{V}{2}}\sum_{i=1}^{d} |f(u)_i - f(v)_i|^2}$$

$$= \sqrt{O\left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{d}\sum_{\{u,v\}\in\binom{V}{2}} |f(u)_i - f(v)_i|^2}$$

$$= \sqrt{O\left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{d} O(n)\sum_{\{u,v\}\in E} |f(u)_i - f(v)_i|^2} \quad \text{(主張)}$$

$$= \sqrt{O\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{d}\sum_{\{u,v\}\in E} |f(u)_i - f(v)_i|^2}$$

定理 9.2 の証明 (7)：$R_{E,F}(\nu) = O(1)$ の証明 (3)

$\mathrm{ave}_2(\nu, F)$

$$= \sqrt{O\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{d}\sum_{\{u,v\}\in E} |f(u)_i - f(v)_i|^2}$$

$$= \sqrt{O\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{\{u,v\}\in E}\sum_{i=1}^{d} |f(u)_i - f(v)_i|^2}$$

$$= \sqrt{O\left(\frac{1}{n}\right)|E|\ \mathrm{ave}_2(\nu, E)} = \sqrt{O\left(\frac{1}{n}\right)\frac{r}{2}n\ \mathrm{ave}_2(\nu, E)}$$

$$= O(1)\ \mathrm{ave}_2(\nu, E)$$

したがって，$R_{E,F}(\nu) = \frac{\mathrm{ave}_2(\nu,F)}{\mathrm{ave}_2(\nu,E)} = O(1)$ □

事実

任意の r 正則グラフ $G = (V, E)$ に対して，$|E| = \frac{r}{2}|V|$

1. ℓ_2 への低歪み埋め込み：下界
2. エクスパンダ
3. ℓ_2 への低歪み埋め込み：下界 (証明)
4. ℓ_2 への低歪み埋め込み：補足

ℓ_p への歪みに対する下界

定理 9.1 (Linial, London, Rabinovich '95, Aumann, Rabani '98)

頂点数 n のエクスパンダ上の最短パス距離が ℓ_2 へ D-埋め込み可能
$\Rightarrow D = \Omega(\log n)$

定理 (Matoušek '97)

$p \in [1, \infty)$：固定
頂点数 n のエクスパンダ上の最短パス距離が ℓ_p へ D-埋め込み可能
$\Rightarrow D = \Omega(\log n)$

ℓ_2 への歪みが $\Omega(\log n)$ になってしまう例

あまり知られていない

- Linial, London, Rabinovich '95, Aumann, Rabani '98
- Khot, Naor '06
- Newman, Rabinovich '09

グラフの族を制限する

$\mathcal{G}$：(連結な) グラフの族

定義：$\mathcal{G}$-距離

有限距離空間 (X, μ) が $\mathcal{G}$-距離 ($\mathcal{G}$-metric) であるとは
グラフ $G = (V, E) \in \mathcal{G}$ と非負の辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$ が存在して,
(X, μ) を G 上の重み付き最短パス距離に等長埋め込み可能であること

- 木距離：$\mathcal{G} =$ 木全体の族
- 外平面的グラフ距離：$\mathcal{G} =$ 外平面的グラフ全体の族
- 平面的グラフ距離：$\mathcal{G} =$ 平面的グラフ全体の族
- ...

木距離

木 (tree)：サイクルを含まない連結グラフ

定理

n 点から成る任意の木距離は

- ℓ_1 へ等長埋め込み可能 (演習問題)
- ℓ_p へ歪み $O((\log\log n)^{\min\{1/2,1/p\}})$ で埋め込み可能 (Matoušek '99)
  - これはタイト (Bourgain '86)

(悪い例は完全二分木)

平面的グラフ距離

平面的グラフ (planar graph)：平面上に辺交差なく描けるグラフ

定理

n 点から成る任意の平面的グラフ距離は
ℓ_2 に歪み $O(\sqrt{\log n})$ で埋め込み可能 (Rao '99)

- これはタイト (Newman, Rabinovich '03)

予想 (Gupta, Newman, Rabinovich, Sinclair '04)

平面的グラフ距離は ℓ_1 へ定数歪みで埋め込み可能

- 彼らは直並列グラフに対しては，予想が正しいことを証明した
- 彼らは H-マイナーを含まないグラフ上の最短パス距離も ℓ_1 に定数歪みで埋め込み可能であることを予想した (H は固定)

外平面的グラフ距離

外平面的グラフ (outer-planar graph)：
平面的グラフで，すべての頂点を非有界面に置けるもの

定理

n 点から成る任意の外平面的グラフは

- ℓ_1 に等長埋め込み可能 (Okamura, Seymour '81)

その一般化

定理

n 点から成る任意の k-外平面的グラフは

- ℓ_1 に定数歪みで埋め込み可能 (定数は k に指数的依存)
(Chekuri, Gupta, Newman, Rabinovich, Sinclair '06)

内周と歪み

グラフの内周：最小サイクルの長さ

定理 (Linial, Magen, Naor '02)

内周 g の任意の r-正則グラフ (辺重みは一定) 上の最短パス距離を ℓ_2 に埋め込むとき，歪み $\Omega(\sqrt{g})$ を必要とする
(ただし，$r \geq 3$ は定数)

予想 (Linial, London, Rabinovich '95)

真の下界は $\Omega(g)$

1. ℓ_2 への低歪み埋め込み：下界
2. エクスパンダ
3. ℓ_2 への低歪み埋め込み：下界 (証明)
4. ℓ_2 への低歪み埋め込み：補足