情報基礎数理学特選
有限距離空間の離散幾何学とアルゴリズム
(7) 歪みと次元のトレードオフ

岡本 吉央

北陸先端科学技術大学院大学

2011 年 1 月 13 日

"最終更新：2011/01/14 12:59"

歪みと次元の関係

(X, μ), (X', ℓ_p^d)：距離空間，$\varphi \colon X \to X'$：D-埋め込み

直観：トレードオフ

歪み D：	小	$\to\to\to$	大
次元 d：	高	$\leftarrow\leftarrow\leftarrow$	低

- 歪みを小さくしたいと望めば，次元を高くしなければならない
- 次元を低くしたいと望めば，歪みを大きくしなければならない

そのような定理と応用を見ていく
- この講義では，特に「不可能性」を見ていく
- そのために，グラフ理論の概念，結果を用いていく

グラフ

定義：グラフ

グラフ (graph) とは 2 個組 (V, E) で，
- V ：有限集合
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ ：V の要素の 2 個組の集合

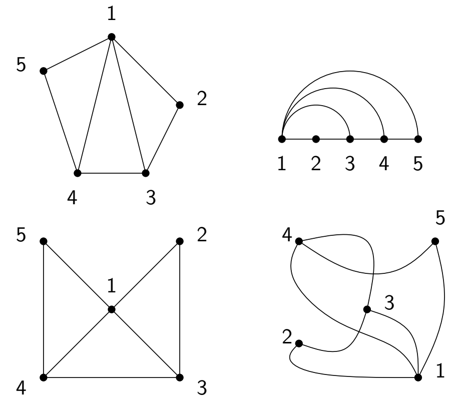
のことである

例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

グラフの描画

グラフを絵で表現することが多い

例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



頂点，辺

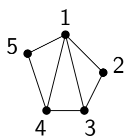
グラフ $G = (V, E)$ に対して
- V ：頂点集合 (vertex set)，$v \in V$ ：頂点 (vertex)
- E ：辺集合 (edge set)，$e \in E$ ：辺 (edge)

定義：グラフの位数 (頂点数)

G の位数 (order) とは $|V|$ のこと　($n(G)$ で表す)

定義：グラフのサイズ (辺数)

G のサイズ (size) とは $|E|$ のこと　($e(G)$ で表す)



$n(G) = 5$, $e(G) = 7$

隣接性，接続性

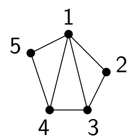
$G = (V, E)$ ：グラフ

定義：隣接性

2 頂点 $u, v \in V$ が隣接している (adjacent) とは，
$\{u, v\} \in E$ を満たすことである

定義：接続性

頂点 $v \in V$ と辺 $e \in E$ が接続している (incident) とは，
$v \in e$ を満たすことである
このとき，v は e の端点 (endpoint) である



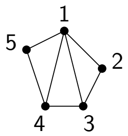
- 2 は 3 に隣接している
- 3 は 5 に隣接していない
- 1 は $\{1, 3\}$ に接続している
- $\{1, 3\}$ は 1 に接続している
- $\{2, 3\}$ は 4 に接続していない

パス

$G = (V, E)$: グラフ

定義：パス

G におけるパス (path) とは，その異なる頂点の列 $v_1, \ldots, v_k$ で，
任意の $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ に対して，$\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ を満たすもののこと



- $1, 2, 3$ はパス
- $2, 3, 4$ はパス
- $4, 1, 2, 3$ はパス
- $4, 2, 1, 3$ はパスではない

さらに定義

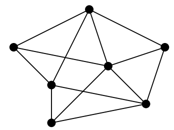
- パス $v_1, \ldots, v_k$ の長さとは $k - 1$ のこと
- パス $v_1, \ldots, v_k$ の端点とは v_1, v_k のこと
- u, v-パスとは，u, v を端点とするパスのこと

連結性

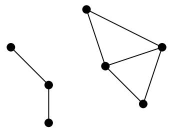
$G = (V, E)$: グラフ

定義：連結性

G が連結である (connected) とは，
任意の $u, v \in V$ に対して u, v-パスが存在すること
そうでないとき，G は非連結 (disconnected) である



connected



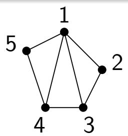
disconnected

グラフ上の距離

$G = (V, E)$: グラフ

定義：最短パス距離

2 頂点 $u, v \in V$ の間の最短パス距離 (shortest-path distance) とは
u, v-パスの最短長のこと ($d_G(u, v)$ で表す)
u, v-パスが存在しないときは ∞ とする



- $d_G(1, 3) = 1$
- $d_G(2, 5) = 2$

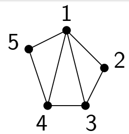
G が連結であるとき，(V, d_G) は距離空間である

サイクル

$G = (V, E)$: グラフ

定義：サイクル

G におけるサイクル (cycle) とは，その頂点列 $v_1, \ldots, v_k, v_1$ で，
$v_1, \ldots, v_k$ はパスであり，$\{v_k, v_1\} \in E$ を満たすもののこと



- $1, 2, 3, 1$ はサイクル
- $4, 1, 2, 3, 4$ はサイクル
- $2, 3, 4, 2$ はサイクルではない

定義：サイクルの長さ

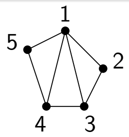
サイクル $v_1, \ldots, v_k, v_1$ の長さとは k のこと

内周

$G=(V,E)$：グラフ

定義：内周

G の内周 (girth) とは G の最小サイクル長 ($g(G)$ で表す)
サイクルが存在しないときは ∞ とする



内周は 3

内周と辺数

記法

$\ell \geq 2$ に対して

$$m(\ell,n)=\max\{e(G)\mid n(G)=n, g(G)\geq \ell+1\}$$

観察

- $m(2,n)=\binom{n}{2}$ (簡単)
- $m(3,n)=\Omega(n^2)$ (簡単)
- $m(4,n)=\Omega(n^{3/2})$ (演習問題)
- $m(\ell,n)\geq m(\ell+1,n)$ (簡単)
- $m(2k+1,n)\geq \frac{1}{2}m(2k,n)$ (演習問題)

つまり，$m(2k,n)$ と $m(2k+1,n)$ は同じオーダー

Erdős の内周予想

予想 (Erdős, '65)

任意の $k\geq 1$ に対して

$$m(2k+1,n)=\Omega(n^{1+1/k})$$

正しいと分かっている場合：$k=1,2,3,5$ のみ
特に

- $m(3,n)=\Omega(n^2)$ (既出)
- $m(5,n)=\Omega(n^{3/2})$ (既出)
- $m(7,n)=\Omega(n^{4/3})$ (Benson '66)
- $m(11,n)=\Omega(n^{6/5})$ (Benson '66)

知られている最良の下界 $m(2k+1,n)=\Omega(n^{1+\frac{2}{3k}\text{ぐらい}})$
(Lazebnik, Ustimenko, Woldar '95)

歪みと次元の関係：下界

定理 7.1

仮定：

- n 個の点から成る距離空間がすべて ℓ_2^d へ D-埋め込み可能
- $D < \ell \leq 5D$

結論：

- $d \geq \dfrac{1}{\log_2 \frac{20D\ell}{\ell - D}} \cdot \dfrac{m(\ell, n)}{n}$

注：

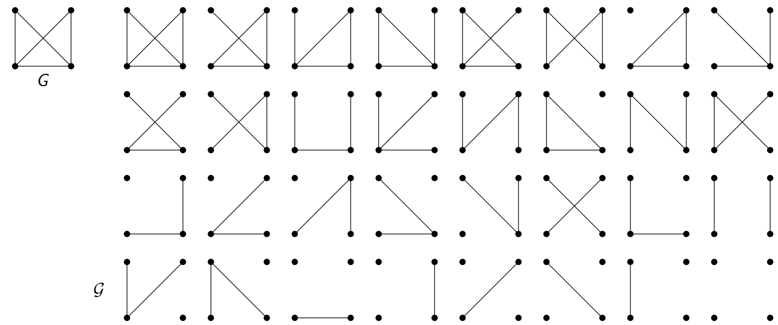
- 今から見る証明は ℓ_2^d でなく，ℓ_p^d に対して同じ結論を導く
- 「$\ell \leq 5D$」という上界は本質でなく，証明を簡単にするための仮定（「$5D$」の 5 を大きくしたら，「20」を大きくすればよい）

証明の方針：内周の大きなグラフから，本質的に異なるたくさんの距離空間を作成する

定理 7.1 の証明 (1)

$G = (V, E)$：グラフ，$|V| = n$, $|E| = m = m(\ell, n)$, $g(G) \geq \ell + 1$

- 任意の $F \subseteq E$ に対して，グラフ $G_F = (V, F)$ を考える
- $\mathcal{G} = \{G_F \mid F \subseteq E\}$ とする



定理 7.1 の証明 (2)

- 任意の $F \subseteq E$ に対して，距離空間 (V, μ_F) を

$$\mu_F(u, v) = \min\{\ell, d_{G_F}(u, v)\}$$

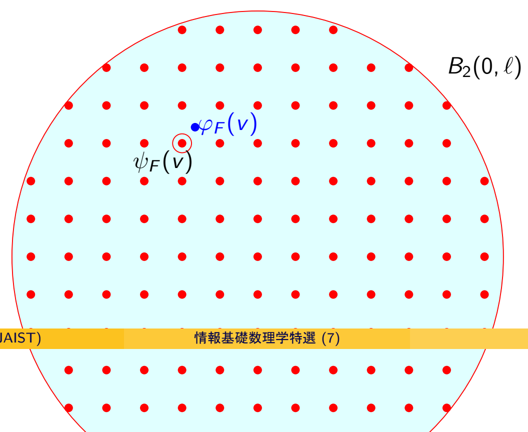
で定義する (これは距離空間である (演習問題))

- 各 $F \subseteq E$ に対して
(V, μ_F) から ℓ_2^d への D-埋め込み φ_F が存在すると仮定
- スケーリングによって，一般性を失わずに次を仮定
  - $\dfrac{1}{D}\mu_F(u, v) \leq \|\varphi_F(u) - \varphi_F(v)\|_2 \leq \mu_F(u, v)$ $(\forall\ u, v \in V)$
  - $\varphi_F(v) \in B_2(0, \ell) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq \ell\}$ $(\forall\ v \in V)$

定理 7.1 の証明 (3)

- $\varepsilon = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{\ell}{D} - 1\right)$ とおく　　($D < \ell \leq 5D$ より，$0 < \varepsilon < 1$)
- $N \subseteq B_2(0, \ell)$：ε-稠密集合，$|N| \leq (4\ell/\varepsilon)^d$　　(演習問題)
- 各 $F \subseteq E$ に対して $\psi_F : V \to N$ を次で定義

$$\psi_F(v) = N \text{ における } \varphi_F(v) \text{ の最近点}$$



定理 7.1 の証明 (4)

- $\|\varphi_F(v) - \psi_F(v)\|_2 \le \varepsilon$ (∵ N の ε-稠密性)

主張

任意の異なる $F_1, F_2 \subseteq E$ に対して，$\psi_{F_1} \ne \psi_{F_2}$

主張が正しいと仮定して，証明を続けると

- 2^m 個の異なる写像 $V \to N$ が得られた
- $\therefore 2^m \le |N|^{|V|} \le \left(\frac{4\ell}{\varepsilon}\right)^{dn}$
- $\therefore m \le dn \log_2 \frac{4\ell}{\varepsilon} = dn \log_2 \frac{20D\ell}{\ell - D}$
- $\therefore d \ge \frac{1}{\log_2 \frac{20D\ell}{\ell-D}} \cdot \frac{m}{n}$ □

定理 7.1 の証明 (5)：主張の証明 (1)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ある $u, v \in V$ に対して，$\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ (∵ $g(G) \ge \ell + 1$)
- $\|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2$ を上から抑えると

$$
\begin{aligned}
&\|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\
&= \|\psi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(u) + \varphi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(v) + \varphi_{F_1}(v) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\
&\le \|\psi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(u)\|_2 + \|\varphi_{F_1}(u) - \varphi_{F_1}(v)\|_2 + \|\varphi_{F_1}(v) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \\
&\qquad \text{(三角不等式)} \\
&\le \varepsilon + \mu_{F_1}(u, v) + \varepsilon = 1 + 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

定理 7.1 の証明 (6)：主張の証明 (2)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- ある $u, v \in V$ に対して，$\{u, v\} \in F_1$ かつ $\{u, v\} \notin F_2$
- $\therefore \mu_{F_1}(u, v) = 1$ かつ $\mu_{F_2}(u, v) = \ell$ (∵ $g(G) \ge \ell + 1$)
- $\|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$ を下から抑えると

$$
\begin{aligned}
&\|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
&= \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v) + \psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u) + \varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
&\ge \|\varphi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(v)\|_2 - \|\psi_{F_2}(u) - \varphi_{F_2}(u)\|_2 - \|\varphi_{F_2}(v) - \psi_{F_2}(v)\|_2 \\
&\ge \frac{1}{D}\mu_{F_2}(u, v) - 2\varepsilon = \frac{\ell}{D} - 2\varepsilon = (5\varepsilon + 1) - 2\varepsilon = 1 + 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

定理 7.1 の証明 (4)：主張の証明 (3)

$F_1, F_2 \subseteq E$ は異なる

- $\therefore \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|_2 \le 1 + 2\varepsilon < 1 + 3\varepsilon \le \|\psi_{F_2}(u) - \psi_{F_2}(v)\|_2$
- $\psi_{F_1}(u) = \psi_{F_2}(u)$ かつ $\psi_{F_1}(v) = \psi_{F_2}(v)$ だとすると

$$\|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\| < \|\psi_{F_1}(u) - \psi_{F_1}(v)\|$$

  となり，矛盾
- $\therefore \psi_{F_1}(u) \ne \psi_{F_2}(u)$ または $\psi_{F_1}(v) \ne \psi_{F_2}(v)$
- つまり，$\psi_{F_1} \ne \psi_{F_2}$ □

歪みと次元の関係：下界

定理 7.1 (再掲)

仮定：

- n 個の点から成る距離空間がすべて ℓ_2^d へ D-埋め込み可能
- $D < \ell \le 5D$

結論：

- $d \ge \dfrac{1}{\log_2 \frac{20D\ell}{\ell - D}} \cdot \dfrac{m(\ell, n)}{n}$

注：

- 今から見る証明は ℓ_2^d でなく，ℓ_p^d に対して同じ結論を導く
- 「$\ell \le 5D$」という上界は本質でなく，証明を簡単にするための仮定（「$5D$」の 5 を大きくしたら，「20」を大きくすればよい）

証明の方針：内周の大きなグラフから，本質的に異なるたくさんの距離空間を作成する

定理 7.1 の系

系 7.2

n 個の点からなるすべての距離空間が ℓ_2^d に D-埋め込み可能であるとする（ただし，D は定数）

- $D < 3 \Rightarrow d = \Omega(n)$
- $D < 5 \Rightarrow d = \Omega(n^{1/2})$
- $D < 7 \Rightarrow d = \Omega(n^{1/3})$

証明：

- 定理 7.1 より，ℓ が定数で，$D < \ell$ のとき，$d = \Omega(m(\ell, n)/n)$
- $m(3, n) = \Omega(n^2)$，$m(5, n) = \Omega(n^{3/2})$，$m(7, n) = \Omega(n^{4/3})$ より，系は従う □

注

この系は ℓ_2^d だけではなく，ℓ_p^d に対しても成立する

ℓ_2 に対する歪みの下界

定理 7.3 (Bourgain '85)

n 点から成る距離空間で，ℓ_2 への埋め込みの歪みを

$$c \log n / \log\log n$$

より小さくできないものが存在する（ただし，c は正定数）

注意：この定理では，次元が出てきていないこと

定理 7.3 の証明 (1)

n 点から成るすべての距離空間が ℓ_2 に D-埋め込み可能であると仮定
(ただし，$D \le c_1 \log n / \log\log n$，$c_1$ は自分で選べる十分小さな定数)

- $d \le C_2 \log n$ として，これらは ℓ_2^d へ $2D$-埋め込み可能
(C_2 は自分で選べる大きな定数) (JL 補題)
- $\ell = 4D$ とする
- $m(\ell, n) \ge \alpha n^{1+\beta/\ell}$ なので (ただし，α, β は自分で選べない定数)

$$m(\ell, n) \ge \alpha n^{1+\frac{\beta}{4D}} \ge \alpha n^{1+\frac{\beta \log\log n}{4c_1 \log n}} = \alpha n \log^{\frac{\beta}{4c_1}} n = \alpha n \log^{C_3} n$$

C_3 は自分で選べる十分大きな定数

事実

$n^{\frac{\log\log n}{\log n}} = \log n$

定理 7.3 の証明 (2)

- $\therefore$ 定理 7.1 より

$$\begin{aligned} d &\ge \frac{1}{\log \frac{20(2D)\ell}{\ell - 2D}} \frac{m(\ell,n)}{n} \ge \frac{1}{\log \frac{40D \cdot 4D}{4D-2D}} \frac{\alpha n \log^{C_3} n}{n} \\ &= \frac{1}{\log 80D} \alpha \log^{C_3} n \ge \frac{\alpha}{\log 80(c_1 \log n / \log\log n)} \log^{C_3} n \\ &\ge \frac{\alpha}{\log n} \log^{C_3} n = \alpha \log^{C_3 - 1} n \end{aligned}$$

- $\therefore$ $C_2 \log n < \alpha \log^{C_3-1} n$ ならば矛盾
- そうなるように C_3 を十分大きく選べばよい □

次の講義の流れ

1. n 点から成る任意の距離空間が ℓ_2 へ $O(\log n)$-埋め込み可能であることを証明 (Bourgain '85)
2. n 点から成る距離空間で，ℓ_2 へ埋め込むときの歪みが $\Omega(\log n)$ になるものを構成
(Linial, London, Rabinovich '95, Aumann, Rabani '98)

注：定理 7.3 は歪みが $\Omega(\log n / \log\log n)$ になるものが存在することしか証明おらず，具体的な距離空間を構成したわけではない