情報基礎数理学特選
有限距離空間の離散幾何学とアルゴリズム
(3) センサネットワーク位置同定問題

岡本 吉央

北陸先端科学技術大学院大学

2011 年 1 月 11 日

"最終更新：2011/01/10 23:02"

このコマの目標

- 等長埋め込み可能性の応用の 1 つを見る
  - センサネットワーク位置同定問題
  - 半正定値計画緩和
  - 計算機実験

センサネットワーク位置同定問題

- センサが平面上にばらまかれている (動いているかもしれない)
- センサは自分のいる位置における情報を得る (温度，日照，...)
- センサは他のセンサと通信できるが，通信範囲は限られている
- 通信範囲により，センサ同士の距離関係が分かる場合がある

解きたい問題

そのような距離情報からセンサの位置を特定できるか？

仮定：位置の目印となる「アンカ」が存在する

問題設定

問題設定

既知であるもの

- アンカの位置
- いくつかのセンサ–センサ間 (アンカ–センサ間) の距離

計算したいもの

- すべてのセンサの位置

問題設定 (数学的)

問題設定

既知であるもの

- n : アンカ，センサの総数
- m : センサの数
  - $1, \dots, m$: センサ
  - $m+1, \dots, n$: アンカ
- $a^i \in \mathbb{R}^2$: アンカ i の位置 $(i = m+1, \dots, n)$
- $\mathcal{N} = \{(i,j) \mid i$ と j の間の距離が既知 $\}$
- $d_{i,j} \in \mathbb{R}$: センサ (アンカ) i とセンサ (アンカ) j の間の Euclid 距離

計算したいもの

- $x^i \in \mathbb{R}^2$: すべてのセンサ $i = 1, \dots, m$ の位置

問題記述

問題

次の条件を満たす $x_i \in \mathbb{R}^2, i \in \{1, \dots, n\}$ があるか判定する
あるならば，それらを計算する

$$\begin{aligned} \|x^i - x^j\|_2^2 &= d_{i,j}^2 && \text{for all } (i,j) \in \mathcal{N} \\ x^i &= a^i && \text{for all } i = m+1, \dots, n \end{aligned}$$

無理矢理，最適化問題として定式化

$$[\mathrm{P}] \quad \inf \left\{ 0 \;\middle|\; \begin{array}{ll} x^i \in \mathbb{R}^2 & \text{for all } i = 1, \dots, m, \\ \|x^i - x^j\|_2^2 = d_{i,j}^2 & \text{for all } (i,j) \in \mathcal{N}, \\ x^i = a^i & \text{for all } i = m+1, \dots, n \end{array} \right\}$$

これをそのまま解くのは難しい

- そのため，緩和する
- 緩和するために，この問題を書き換える

1. センサネットワーク位置同定問題
2. 半正定値計画緩和
3. 計算機実験

問題の書き換え

- $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を $y_{i,j} = \langle x^i, x^j\rangle$ で定義
- $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ とすると，$Y = X^\top X$
- 注意：$\mathrm{rank}(Y) \leq 2$
- $\|x^i - x^j\|_2^2 = \|x^i\|_2^2 + \|x^j\|_2^2 - 2\langle x^i, x^j\rangle = y_{i,i} + y_{j,j} - 2y_{i,j}$

問題 P の書き換え

$$[\mathrm{P}] \quad \inf\left\{ 0 \;\middle|\; \begin{array}{ll} Y - X^\top X = O, \mathrm{rank}(Y) \leq 2, & \\ y_{i,i} + y_{j,j} - 2y_{i,j} = d_{i,j}^2 & \text{for all } (i,j) \in \mathcal{N} \\ x^i = a^i & \text{for all } i = m+1, \dots, n \end{array} \right\}$$

この問題を半正定値計画問題に緩和

- 「$\mathrm{rank}(Y) \leq 2$」を除去
- 「$Y - X^\top X = O$」を「$Y - X^\top X \succeq O$」に変換

事実：$Y - X^\top X \succeq O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Y & X^\top \\ X & I \end{pmatrix} \succeq O \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$

半正定値計画緩和

$$[\mathrm{P}] \quad \inf\left\{ 0 \;\middle|\; \begin{array}{ll} Y - X^\top X = O, \mathrm{rank}(Y) \leq 2, & \\ y_{i,i} + y_{j,j} - 2y_{i,j} = d_{i,j}^2 & \text{for all } (i,j) \in \mathcal{N} \\ x^i = a^i & \text{for all } i = m+1, \dots, n \end{array} \right\}$$

問題 P の緩和

$$[\mathrm{R}] \quad \inf\left\{ 0 \;\middle|\; \begin{array}{ll} Z \succeq O, & \\ z_{i,i} + z_{j,j} - 2z_{i,j} = d_{i,j}^2 & \text{for all } (i,j) \in \mathcal{N} \\ z_{n+1,i} = a_1^i, z_{i,n+1} = a_1^i & \text{for all } i = m+1, \dots, n, \\ z_{n+2,i} = a_2^i, z_{i,n+2} = a_2^i & \text{for all } i = m+1, \dots, n, \\ z_{n+1,n+1} = 1, z_{n+1,n+2} = 0, & \\ z_{n+2,n+1} = 0, z_{n+2,n+2} = 1 & \end{array} \right\}$$

これは半正定値計画問題であり，(近似的ではあるが) 解ける

1. センサネットワーク位置同定問題
2. 半正定値計画緩和
3. 計算機実験

計算機実験

結果については小島政和氏のスライドを参照

- 小島政和．半正定値行列補完における双対性とその SDP への応用．日本オペレーションズリサーチ学会「計算と最適化の新展開」研究部会，2009 年 3 月．
http://www.is.titech.ac.jp/˜kojima/articles/SCOPE2009.pdf

1. センサネットワーク位置同定問題
2. 半正定値計画緩和
3. 計算機実験