

情報基礎数理学特選  
有限距離空間の離散幾何学とアルゴリズム  
(1) 導入, 等長埋め込み可能性

岡本 吉央

北陸先端科学技術大学院大学

2011年1月11日

”最終更新 : 2011/02/04 8:02”

参考文献

2冊の書籍

- ▶ J. Matoušek,  
*Lectures on Discrete Geometry*.  
Springer, New York, 2002.  
日本語訳あり
- ▶ M. M. Deza and M. Laurent,  
*Geometry of Cuts and Metrics*.  
Springer, Berlin Heidelberg, 1997.

その他, 研究論文

目標

この講義は数学と計算理論に関するもの

講義の目標

- ▶ 「有限距離空間」に関する問題の理解
  - ▶ 数学的問題
  - ▶ 計算理論的問題
- ▶ 「その応用」に関する理解
  - ▶ 大規模データ処理, ネットワーク

前提知識

- ▶ 学部 1, 2 年生程度の数学 (線形代数, 離散数学, 確率)

評価

単位修得のための条件

レポートの提出

- ▶ 内容 : 研究論文の要約
- ▶ 評価法 : 要約内容および文章表現の正確さ, 的確さ, 簡潔さ
- ▶ 提出締切 : 2011年2月4日 (金) 23:59 (UTC+9)
- ▶ 提出場所 : 岡本へ直接メールで (okamotoy at jaist.ac.jp)

詳細

- ▶ 授業 wiki ページに掲載されている研究論文の 1 つを選択
- ▶ その内容の核となる部分を要約
  - ▶ どんな問題に取り組んでいるか, 主要な貢献は何か, それを理解するために必要な専門用語の意味は何か
- ▶ A4 片面で多くても 4 ページぐらいを目安
- ▶ **日本語に翻訳することが目的ではないので, 英語でもよい**

## 進め方 (予定)

	10:30-	13:00-	14:40-	16:20-
1/11(火)	講義	講義	演習+討議	講義
1/12(水)	講義	講義	演習+討議	講義
1/13(木)	講義	講義	演習+討議	講義
1/14(金)	講義	講義	講義+討議	

注意：演習と討議には積極的に参加を

## 講義計画

- ① 1/11(2) : 導入, 等長埋め込み可能性 (理論)
- ② 1/11(3) : 最適化理論速習
- ③ 1/11(5) : 等長埋め込み可能性 (応用) :  
センサネットワーク位置同定問題
- ④ 1/12(2) : 歪み, 次元削減 (理論) : Johnson-Lindenstrauss の補題
- ⑤ 1/12(3) : 次元削減 (応用) : 線形方程式系の疎解
- ⑥ 1/12(5) : 次元削減 (応用) : 近似最近点探索
- ⑦ 1/13(2) : 低歪み埋め込み (理論) : 歪みと次元のトレードオフ
- ⑧ 1/13(3) : 低歪み埋め込み (理論) : Bourgain の埋め込み
- ⑨ 1/13(5) : 低歪み埋め込み (理論) :  $l_2$  埋め込みに対する歪みの下界
- ⑩ 1/14(2) : 低歪み埋め込み (応用) : 最疎カット問題と  $l_1$  距離
- ⑪ 1/14(3) : 低歪み埋め込み (応用) : 最疎カット問題と負タイプの距離
- ⑫ 1/14(4) : 予備

## 事務的内容

- ▶ 講義のウェブページ
  - ▶ <http://www.jaist.ac.jp/~okamotoy/lect/2010/metemb/>
  - ▶ 講義スライド, 演習問題, レポート問題はここを参照のこと
- ▶ 講師 : 岡本 吉央
  - ▶ 北陸先端科学技術大学院大学 大学院教育イニシアティブセンター
  - ▶ Email: okamotoy at jaist.ac.jp

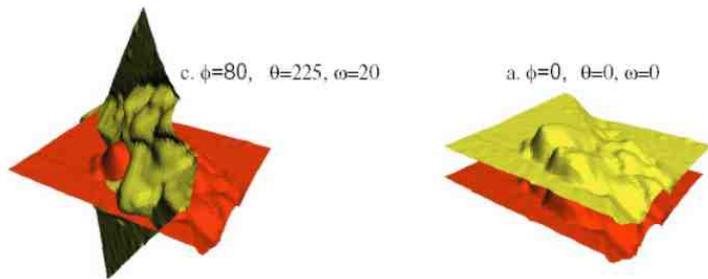
- ① 導入
- ② 有限距離空間 : 定義と例
- ③ 有限距離空間の性質
- ④ 等長埋め込み可能性 : 定義
- ⑤ 等長埋め込み可能性 :  $l_\infty$
- ⑥ 等長埋め込み可能性 :  $l_2$
- ⑦ 等長埋め込み可能性 :  $l_1$

導入  
距離空間の例：交通網と経路選択



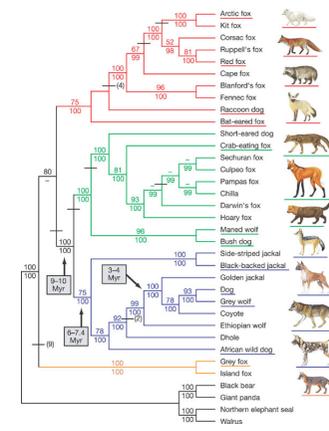
(from Google)  
2011-01-11 9 / 62

導入  
距離空間の例：形状モデリングとマッチング



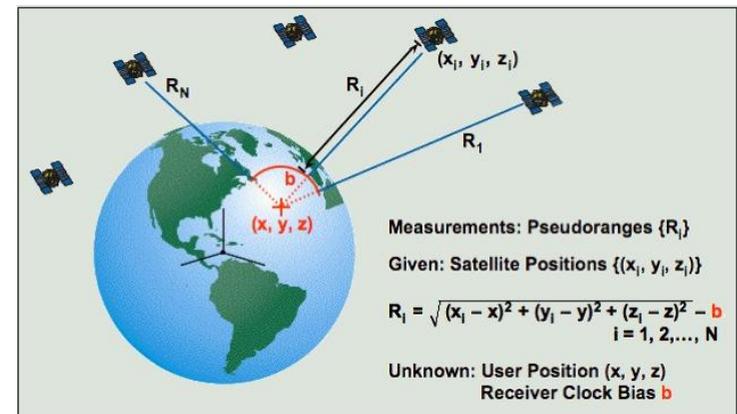
<http://parlab.epfl.ch/page79375.html?matrix=1237804470776>

導入  
距離空間の例：生物種と進化系統樹

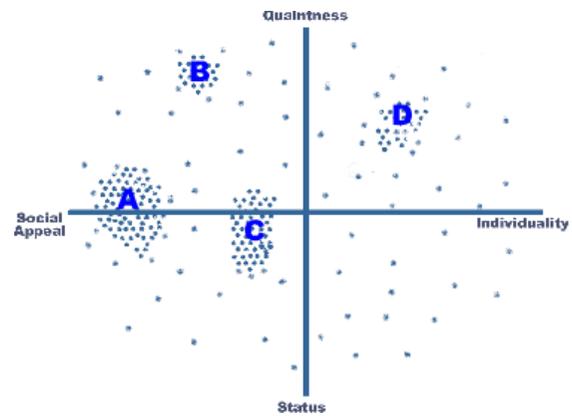


Lindblad-Toh et al., Nature 438 (2005) 803-819

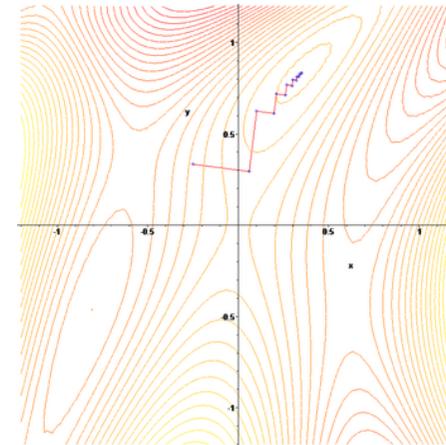
導入  
距離空間の例：GPS 測量



<http://www.gpstextbook.com/>



[http://en.wikipedia.org/wiki/Cluster\\_analysis\\_\(in\\_marketing\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Cluster_analysis_(in_marketing))



[http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient\\_descent](http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_descent)

- ▶ 多様な分野に登場
- ▶ 定義が極めて単純
- ▶ 豊かな数学的構造
- ▶ 近年の活発な研究

- ① 導入
- ② 有限距離空間：定義と例
- ③ 有限距離空間の性質
- ④ 等長埋め込み可能性：定義
- ⑤ 等長埋め込み可能性： $l_\infty$
- ⑥ 等長埋め込み可能性： $l_2$
- ⑦ 等長埋め込み可能性： $l_1$

## 距離空間：定義

 $X$ ：集合

## 定義：距離

関数  $\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  が  $X$  上の距離 (metric) であるとは、次の3つの条件を満たすこと

- ①  $\forall x, y \in X: \mu(x, y) = \mu(y, x)$  (対称性)
- ②  $\forall x, y \in X: \mu(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ③  $\forall x, y, z \in X: \mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$  (三角不等式)

## 定義：距離空間

2つ組  $(X, \mu)$  が距離空間 (metric space) であるとは、 $\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  が  $X$  上の距離であること

## 擬距離空間：定義

 $X$ ：集合

## 定義：擬距離

関数  $\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  が  $X$  上の擬距離 (pseudo-metric) であるとは、次の3つの条件を満たすこと

- ①  $\forall x, y \in X: \mu(x, y) = \mu(y, x)$  (対称性)
- ②  $\forall x, y \in X: \mu(x, y) = 0 \Leftarrow x = y$
- ③  $\forall x, y, z \in X: \mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$  (三角不等式)

## 定義：擬距離空間

2つ組  $(X, \mu)$  が擬距離空間 (pseudo-metric space) であるとは、 $\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  が  $X$  上の擬距離であること

注意：距離空間は擬距離空間

## 有限距離空間

## 定義：有限距離空間

有限距離空間 (finite metric space) とは距離空間  $(X, \mu)$  で  $X$  が有限集合であるもの

## 定義：有限擬距離空間

有限擬距離空間 (finite pseudo-metric space) とは擬距離空間  $(X, \mu)$  で  $X$  が有限集合であるもの

注：「離散距離空間」は違うものを指す

## 有限距離空間の例

 $X = \{a, b, c, d\}$ 

$$\begin{array}{cccc}
 \mu(a, a) = 0 & \mu(a, b) = 2 & \mu(a, c) = 1 & \mu(a, d) = 2 \\
 \mu(b, a) = 2 & \mu(b, b) = 0 & \mu(b, c) = 1 & \mu(b, d) = 2 \\
 \mu(c, a) = 1 & \mu(c, b) = 1 & \mu(c, c) = 0 & \mu(c, d) = 3 \\
 \mu(d, a) = 2 & \mu(d, b) = 2 & \mu(d, c) = 3 & \mu(d, d) = 0
 \end{array}$$

## 定義：距離

関数  $\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  が  $X$  上の距離 (metric) であるとは、次の3つの条件を満たすこと

- ①  $\forall x, y \in X: \mu(x, y) = \mu(y, x)$  (対称性)
- ②  $\forall x, y \in X: \mu(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ③  $\forall x, y, z \in X: \mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$  (三角不等式)

## 有限擬距離空間の例

$$X = \{a, b, c, d\}$$

$$\begin{array}{llll} \mu(a, a) = 0 & \mu(a, b) = 1 & \mu(a, c) = 0 & \mu(a, d) = 2 \\ \mu(b, a) = 1 & \mu(b, b) = 0 & \mu(b, c) = 1 & \mu(b, d) = 2 \\ \mu(c, a) = 0 & \mu(c, b) = 1 & \mu(c, c) = 0 & \mu(c, d) = 2 \\ \mu(d, a) = 2 & \mu(d, b) = 2 & \mu(d, c) = 2 & \mu(d, d) = 0 \end{array}$$

## 定義：擬距離

関数  $\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  が  $X$  上の擬距離 (pseudo-metric) であるとは、次の3つの条件を満たすこと

- ①  $\forall x, y \in X: \mu(x, y) = \mu(y, x)$  (対称性)
- ②  $\forall x, y \in X: \mu(x, y) = 0 \iff x = y$
- ③  $\forall x, y, z \in X: \mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$  (三角不等式)

## 有限距離空間の表現 (1)：行列

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & a & b & c & d \\ a & 0 & 2 & 1 & 2 \\ b & 2 & 0 & 1 & 2 \\ c & 1 & 1 & 0 & 3 \\ d & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array} \in \mathbb{R}^{X \times X} \end{array}$$

距離  $\rightsquigarrow$  距離行列

距離行列は

- ▶ 対称
- ▶ 対角成分がゼロ，非対角成分が非ゼロ
- ▶ 三角不等式を満たす

## 有限擬距離空間の表現 (1)：行列

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & a & b & c & d \\ a & 0 & 1 & 0 & 2 \\ b & 1 & 0 & 1 & 2 \\ c & 0 & 1 & 0 & 2 \\ d & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \in \mathbb{R}^{X \times X} \end{array}$$

擬距離  $\rightsquigarrow$  擬距離行列

距離行列は

- ▶ 対称
- ▶ 対角成分がゼロ (非対角成分はゼロでもよい)
- ▶ 三角不等式を満たす

## 有限距離空間の表現 (2)：ベクトル

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & a & b & c & d \\ a & 0 & 2 & 1 & 2 \\ b & 2 & 0 & 1 & 2 \\ c & 1 & 1 & 0 & 3 \\ d & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array} \in \mathbb{R}^{X \times X} \leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{l} \{a, b\} \\ \{a, c\} \\ \{a, d\} \\ \{b, c\} \\ \{b, d\} \\ \{c, d\} \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \in \mathbb{R}^{\binom{X}{2}} \end{array}$$

## 補足 (記法)

$$\binom{X}{2} = \{Y \subseteq X \mid |Y| = 2\}$$

## 有限擬距離空間の表現 (2)：ベクトル

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \in \mathbb{R}^{X \times X} \leftrightarrow \begin{array}{l} \{a, b\} \\ \{a, c\} \\ \{a, d\} \\ \{b, c\} \\ \{b, d\} \\ \{c, d\} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \in \mathbb{R}^{\binom{X}{2}}$$

## 有限距離空間の表現 (3)：グラフ

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array} \in \mathbb{R}^{X \times X} \leftrightarrow \begin{array}{c} a \\ c \end{array} \begin{array}{c} b \\ d \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

## 定義 (最短パス距離)

辺重み付きグラフにおける**最短パス距離** (shortest-path metric) とは、2 頂点間の最短パス長によって定義された距離

## 有限擬距離空間の表現 (3)：グラフ

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \in \mathbb{R}^{X \times X} \leftrightarrow \begin{array}{c} a \\ c \end{array} \begin{array}{c} b \\ d \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

## 定義 (最短パス距離)

辺重み付きグラフにおける**最短パス距離** (shortest-path metric) とは、2 頂点間の最短パス長によって定義された距離

## 距離空間の例：ユークリッド距離

2 点  $x, y \in \mathbb{R}^d$  の**ユークリッド距離** (Euclid distance) とは

$$\sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2}$$

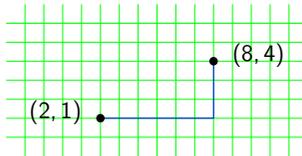
(2, 1) と (8, 4) のユークリッド距離は

$$\sqrt{(2-8)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5}$$

## 距離空間の例：マンハッタン距離

2点  $x, y \in \mathbb{R}^d$  のマンハッタン距離 (Manhattan distance) とは

$$\sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$$

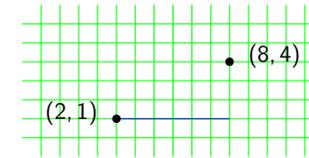


(2, 1) と (8, 4) のマンハッタン距離は  $|2 - 8| + |1 - 4| = |-6| + |-3| = 9$

## 距離空間の例：最大距離

2点  $x, y \in \mathbb{R}^d$  の最大距離 (maximum distance) とは

$$\max\{|x_i - y_i| \mid i \in \{1, \dots, d\}\}$$



(2, 1) と (8, 4) のマンハッタン距離は  $\max\{|2 - 8|, |1 - 4|\} = 6$

## ノルムから距離空間を構成する

$d$ : 自然数

## 定義：ノルム

$\mathbb{R}^d$  上のノルム (norm) とは関数  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  で次を満たすものこと

- ①  $\forall x \in \mathbb{R}^d: \|x\| \geq 0$
- ②  $\forall x \in \mathbb{R}^d: \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ③  $\forall x \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- ④  $\forall x, y \in \mathbb{R}^d: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

## 性質 (演習問題)

$\mathbb{R}^d$  上のノルム  $\|\cdot\|$  に対して,  $\mu: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\mu(x, y) = \|x - y\|$$

と定義すると,  $(\mathbb{R}^d, \mu)$  は距離空間

## よく登場するノルム

▶  $l_1$  ノルム (マンハッタン・ノルム)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$$

▶  $l_2$  ノルム (ユークリッド・ノルム)

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$$

▶  $l_\infty$  ノルム (最大ノルム)

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i \in \{1, \dots, d\}\}$$

よく登場するノルム： $l_p$  ノルム $1 \leq p < \infty$  : 実数定義： $l_p$  ノルム $\mathbb{R}^d$  上の  $l_p$  ノルム ( $l_p$ -norm) とは

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^d |x_i|^p}$$

のこと

注： $l_p$  ノルムは実際にノルムである

記法

距離空間  $(\mathbb{R}^d, \mu)$  の  $\mu$  が  $l_p$  ノルムに誘導されるとき、この距離空間、および  $\mathbb{R}^d$  そのものを  $l_p^d$  と書くことがある

## 距離空間の例：ハミング距離

 $\Sigma$  : 有限集合,  $d$  : 自然数

定義：ハミング距離

 $\Sigma^d$  上のハミング距離 (Hamming distance) とは、関数  $\mu: \Sigma^d \times \Sigma^d \rightarrow \mathbb{R}$  で、

$$\mu(x, y) = |\{i \in \{1, \dots, d\} \mid x_i \neq y_i\}|$$

と定義されるもののこと

 $(\Sigma^d, \mu)$  は距離空間 (演習問題)

$s_1 =$  ieyasu  
 $s_2 =$  ietuna  
 $s_3 =$  ienobu  
 $s_4 =$  ieharu

$\mu$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
$s_1$		4	3	2
$s_2$			4	4
$s_3$				3
$s_4$				

## ① 導入

## ② 有限距離空間：定義と例

## ③ 有限距離空間の性質

## ④ 等長埋め込み可能性：定義

⑤ 等長埋め込み可能性： $l_\infty$ ⑥ 等長埋め込み可能性： $l_2$ ⑦ 等長埋め込み可能性： $l_1$ 

## 数学的思考の一端

## 数学的思考の典型

- ▶ ある性質を満たすものの「全体」を見る
- ▶ その全体の性質・構造を探る

## なぜ？

- ▶ よい性質を満たすもの/満たさないものの関連が分かる
- ▶ よい性質/悪い性質の区別が可能になる
- ▶ 特殊化/一般化の糸口がつかめる

## どういう構造？

- ▶ 代数的構造
- ▶ 幾何的構造 ← この講義ではこちら

## 距離の非負スカラー倍も距離

$$\mathbb{R}_+ = \mathbb{R} \cap [0, +\infty)$$

## 観察 1.1

$$\mu: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_+$$

- ▶  $\mu$ : 距離  $\Rightarrow \lambda\mu$ : 距離
- ▶  $\mu$ : 擬距離  $\Rightarrow \lambda\mu$ : 擬距離

証明：簡単なので省略

## 距離の和も距離

## 観察 1.2

$$\mu_1: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \mu_2: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

- ▶  $\mu_1, \mu_2$ : 距離  $\Rightarrow \mu_1 + \mu_2$ : 距離
- ▶  $\mu_1, \mu_2$ : 擬距離  $\Rightarrow \mu_1 + \mu_2$ : 擬距離

証明：簡単なので省略

## (擬) 距離全体は錐を成す

## 命題 1.3 (観察 1.1 と観察 1.2 の帰結)

有限集合  $X$  に対して  $\{\mu \mid \mu: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \text{ は (擬) 距離}\}$  は錐

## 定義：錐

集合  $C \subseteq \mathbb{R}^d$  が錐 (cone) であるとは、次の2つを満たすこと

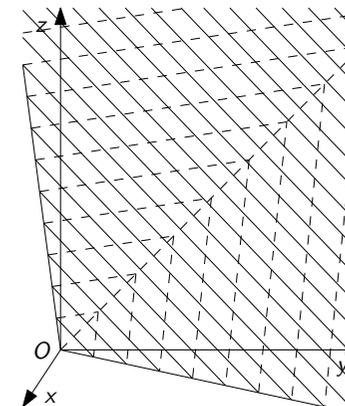
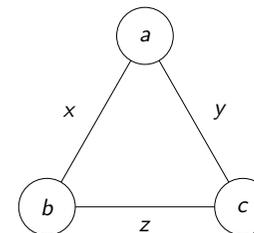
- ①  $x \in C, \lambda \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \lambda x \in C$
- ②  $x, y \in C \Rightarrow x + y \in C$

注：命題 1.3 では  $\mu$  を  $\mathbb{R}^{\binom{X}{2}}$  中のベクトルと見なしている

## 定義：擬距離錐

$X$  上の擬距離全体の集合を  $X$  上の擬距離錐 (pseudo-metric cone) と呼ぶ

例： $X = \{a, b, c\}$



## 擬距離全体は多面体を成す

## 命題 1.4 (擬距離の定義の帰結)

擬距離錐は多面体

## 定義：多面体

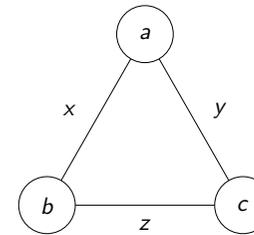
集合  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  が**多面体** (polyhedron) であるとは、それが (等号付き) 線形不等式系の解集合であること

有限集合  $X$  上の擬距離錐は

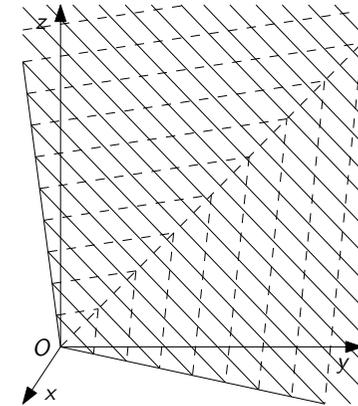
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^{\binom{X}{2}} \mid \begin{array}{l} x_{\{i,j\}} \geq 0 \quad \text{for all } i,j \in X, i \neq j, \\ x_{\{i,j\}} \leq x_{\{i,k\}} + x_{\{k,j\}} \quad \text{for all } i,j,k \in X, i \neq j, i \neq k, j \neq k \end{array} \right\}$$

## 定義：多面的錐

錐であり、かつ多面体である集合は**多面的錐** (polyhedral cone) と呼ばれる

例 :  $X = \{a, b, c\}$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \mid \begin{array}{l} x, y, z \geq 0, \\ x \leq y + z, \\ y \leq x + z, \\ z \leq x + y \end{array} \right\}$$



## ① 導入

## ② 有限距離空間：定義と例

## ③ 有限距離空間の性質

## ④ 等長埋め込み可能性：定義

⑤ 等長埋め込み可能性 :  $l_\infty$ ⑥ 等長埋め込み可能性 :  $l_2$ ⑦ 等長埋め込み可能性 :  $l_1$ 

## 有限距離空間の分類

## 今日の目標

- ▶ 有限距離空間の間の関係を調べる
- ▶ 同じ有限距離空間をまとめる
- ▶ 特に、ノルム空間から得られるものを考える

## 有限距離空間が「同じ」であることの定義...

距離を保存するような写像があれば、同じと見なせる

## 等長埋め込み可能性

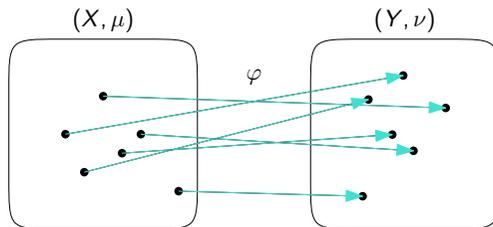
$(X, \mu), (Y, \nu)$  : 有限擬距離空間

定義：等長埋め込み可能性

$(X, \mu)$  が  $(Y, \nu)$  に等長埋め込み可能 (isometrically embeddable) であるとは、ある写像  $\varphi: X \rightarrow Y$  が存在して

$$\mu(x, x') = \nu(\varphi(x), \varphi(x'))$$

が任意の  $x, x' \in X$  に対して成立すること

 $l_1$  等長埋め込み可能性 ( $l_2, l_\infty$  も同様)

$(X, \mu)$  : 有限擬距離空間,  $d$  : 自然数

定義： $l_1^d$  等長埋め込み可能性

$(X, \mu)$  が  $l_1^d$  等長埋め込み可能 ( $l_1^d$ -isometrically embeddable) であるとは、ある写像  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^d$  が存在して

$$\mu(x, x') = \|\varphi(x) - \varphi(x')\|_1$$

が任意の  $x, x' \in X$  に対して成立すること

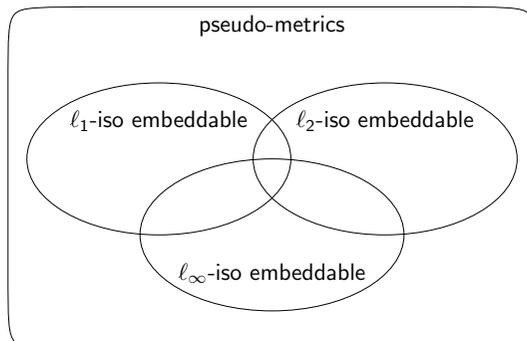
定義： $l_1$  等長埋め込み可能性

$(X, \mu)$  が  $l_1$  等長埋め込み可能 ( $l_1$ -isometrically embeddable) であるとは、ある自然数  $d$  に対して  $(X, \mu)$  が  $l_1^d$  等長埋め込み可能であること

$l_2, l_\infty$  に対しても同様に定義

## 今から行うこと

- ▶  $l_\infty$  等長埋め込み可能な有限擬距離空間はどのようなものか？
- ▶  $l_2$  等長埋め込み可能な有限擬距離空間はどのようなものか？
- ▶  $l_1$  等長埋め込み可能な有限擬距離空間はどのようなものか？

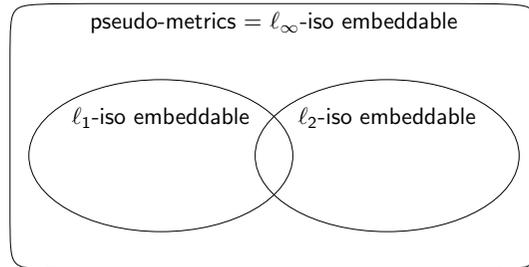


- 1 導入
- 2 有限距離空間：定義と例
- 3 有限距離空間の性質
- 4 等長埋め込み可能性：定義
- 5 等長埋め込み可能性： $l_\infty$
- 6 等長埋め込み可能性： $l_2$
- 7 等長埋め込み可能性： $l_1$

## Kuratowski の埋め込み

## 定理

任意の有限擬距離空間  $(X, \mu)$  は  $l_\infty$  等長埋め込み可能



## 証明の流れ:

- ① 等長埋め込み  $\varphi$  を具体的に構成
- ② その  $\varphi$  が等長埋め込みであることを証明

## Kuratowski の埋め込み (2)

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$  とする

## 構成法 (Kuratowski の埋め込み (簡易版))

埋め込み  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  を次で定義

$$\varphi(x) = (\mu(x, x_1), \mu(x, x_2), \dots, \mu(x, x_n))$$

	$a$	$b$	$c$	$d$			
$a$	0	2	1	2	$\in \mathbb{R}^{X \times X}$	$\rightsquigarrow$	$\varphi(a) = (0, 2, 1, 2)$
$b$	2	0	1	2			$\varphi(b) = (2, 0, 1, 2)$
$c$	1	1	0	3			$\varphi(c) = (1, 1, 0, 3)$
$d$	2	2	3	0			$\varphi(d) = (2, 2, 3, 0)$

## Kuratowski の埋め込み (3)

## 主張

この  $\varphi$  は  $l_\infty$  等長埋め込み

- ▶ 距離が小さくならないこと (non-contracting)

$$\begin{aligned} \|\varphi(x_i) - \varphi(x_j)\|_\infty &= \max\{|\varphi(x_i)_k - \varphi(x_j)_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \\ &\geq |\varphi(x_i)_j - \varphi(x_j)_j| \\ &= |\mu(x_i, x_j) - \mu(x_j, x_j)| \\ &= \mu(x_i, x_j) \end{aligned}$$

- ▶ 距離が大きくならないこと (non-expanding)

$$\begin{aligned} \|\varphi(x_i) - \varphi(x_j)\|_\infty &= |\varphi(x_i)_k - \varphi(x_j)_k| \quad (\text{for some } k) \\ &= |\mu(x_i, x_k) - \mu(x_j, x_k)| \\ &\leq \mu(x_i, x_j) \end{aligned}$$

□

## ① 導入

## ② 有限距離空間: 定義と例

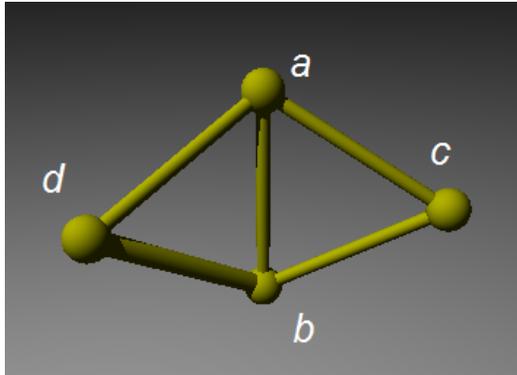
## ③ 有限距離空間の性質

## ④ 等長埋め込み可能性: 定義

⑤ 等長埋め込み可能性:  $l_\infty$ ⑥ 等長埋め込み可能性:  $l_2$ ⑦ 等長埋め込み可能性:  $l_1$

$\ell_2$  等長埋め込み可能ではない例

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	1
c	1	1	0	2
d	1	1	2	0

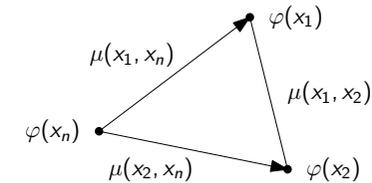
 $\ell_2$  等長埋め込み可能な擬距離空間の特徴 (1)

- ▶  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $(X, \mu) : \ell_2$  等長埋め込み可能な擬距離空間
- ▶  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^d : \ell_2$  等長埋め込み

## 観察

- ▶  $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_n)$  は (ある平面上の) 三角形
- ▶ 余弦定理より

$$\langle \varphi(x_1) - \varphi(x_n), \varphi(x_2) - \varphi(x_n) \rangle = \frac{1}{2}(\mu(x_1, x_n)^2 + \mu(x_2, x_n)^2 - \mu(x_1, x_2)^2)$$

 $\ell_2$  等長埋め込み可能な擬距離空間の特徴 (2)

- ▶ 行列  $G \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  を次で定義

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{1}{2}(\mu(x_i, x_n)^2 + \mu(x_j, x_n)^2 - \mu(x_i, x_j)^2) \\ &= \langle \varphi(x_i) - \varphi(x_n), \varphi(x_j) - \varphi(x_n) \rangle \end{aligned}$$

- ▶ これは**対称半正定値行列**

## 復習: 半正定値行列

## 定義: 半正定値行列

実行列  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  が**半正定値** (positive semi-definite) であるとは任意の  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して  $x^T A x \geq 0$  が成り立つこと

## 事実 (証明は省略)

実対称行列  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  に対して, 次は同値

- ①  $A$  は半正定値行列
- ②  $\exists$  自然数  $k$ , 行列  $B \in \mathbb{R}^{n \times k} : A = B B^T$
- ③  $\exists$  自然数  $k$ , ベクトル  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n : a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$
- ④  $A$  のすべての固有値が非負実数

$\ell_2$  等長埋め込み可能な擬距離行列の特徴付け

$(X, \mu)$ : 有限擬距離空間,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

定理 (Schoenberg '35)

次の2つは同値

- ①  $(X, \mu)$  は  $\ell_2$  等長埋め込み可能
- ② 行列  $G \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  を

$$g_{i,j} = \frac{1}{2}(\mu(x_i, x_n)^2 + \mu(x_j, x_n)^2 - \mu(x_i, x_j)^2)$$

と定義したとき,  $G$  は対称半正定値行列

特に, ベクトル  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^k$  を用いて  $g_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$  と書けるとき,  $X$  は  $\ell_2^k$  等長埋め込み可能

証明: 演習問題 (今までの議論を踏襲すれば難しくはないはず)  
系:  $(X, \mu)$  が  $\ell_2$  等長埋め込み可能  $\Rightarrow \ell_2^{n-1}$  等長埋め込み可能

- ① 導入
- ② 有限距離空間: 定義と例
- ③ 有限距離空間の性質
- ④ 等長埋め込み可能性: 定義
- ⑤ 等長埋め込み可能性:  $\ell_\infty$
- ⑥ 等長埋め込み可能性:  $\ell_2$
- ⑦ 等長埋め込み可能性:  $\ell_1$

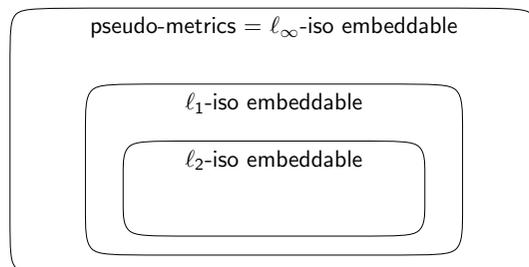
 $\ell_2$  等長埋め込み可能性と  $\ell_1$  等長埋め込み可能性

定理 (folklore?)

$(X, \mu)$ : 有限擬距離空間

$(X, \mu)$  が  $\ell_2$  等長埋め込み可能  $\Rightarrow (X, \mu)$  が  $\ell_1$  等長埋め込み可能

証明: 略 (Deza & Laurent, Section 6.4 参照) □

 $\ell_1$  等長埋め込み擬距離全体は錐を成す

$X$ : 有限集合

命題

$X$  上の  $\ell_1$  等長埋め込み可能擬距離全体は多面的錐

証明:

- ▶ 錐を成すこと: 演習問題
- ▶ 多面体を成すこと: 後の講義にて □

- ① 導入
- ② 有限距離空間 : 定義と例
- ③ 有限距離空間の性質
- ④ 等長埋め込み可能性 : 定義
- ⑤ 等長埋め込み可能性 :  $l_\infty$
- ⑥ 等長埋め込み可能性 :  $l_2$
- ⑦ 等長埋め込み可能性 :  $l_1$

判定問題 :  $l_2$  等長埋め込み可能性,  $l_1$  等長埋め込み可能性

問題 :  $l_2$  等長埋め込み可能性判定問題

入力 : 有限距離空間  $(X, \mu)$

質問 :  $(X, \mu)$  は  $l_2$  等長埋め込み可能であるか?

命題

$l_2$  等長埋め込み可能性判定問題は多項式時間 ( $O(|X|^3)$  時間) で解ける

( $n \times n$  行列の半正定値性が  $O(n^3)$  時間で判定可能だから)

問題 :  $l_1$  等長埋め込み可能性判定問題

入力 : 有限距離空間  $(X, \mu)$

質問 :  $(X, \mu)$  は  $l_1$  等長埋め込み可能であるか?

定理 (Avis, Deza '91)

$l_1$  等長埋め込み可能性判定問題は NP 完全