

凡例：(*) 推奨；(-) 易；(+) 難

演習問題 1 (*) 任意のグラフ $G = (V, E)$ の Laplace 行列 $L_G \in \mathbb{R}^{V \times V}$ が対称半正定値行列であることを証明せよ.

演習問題 2 (*) 任意のグラフ $G = (V, E)$ の Laplace 行列 $L_G \in \mathbb{R}^{V \times V}$ の第二最小固有値 $\lambda_2(G)$ が

$$\lambda_2(G) = \min \left\{ \frac{\sum_{\{u,v\} \in E} (x_u - x_v)^2}{\sum_{v \in V} x_v^2} \mid x \in \mathbb{R}^V, \sum_{v \in V} x_v = 0 \right\}$$

を満たすことを証明せよ.

演習問題 3 (-) 任意の実数 x_1, \dots, x_n に対して,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (x_i - x_j)^2 = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

が成り立つことを証明せよ.

演習問題 4 (-) 任意の r 正則グラフ $G = (V, E)$ に対して, $2|E| = r|V|$ が成り立つことを証明せよ.

演習問題 5 (*) 任意の木距離が ℓ_1 に等長埋め込み可能であることを証明せよ. ヒント: 頂点数が 2 以上の任意の木に次数 1 の頂点が存在するという事実を用いてもよい.