凡例： $(*)$ 推奨； $(-)$ 易； $(+)$ 難

演習問題 1 $(*-)$ Bourgain の定理の証明を完結するため，講義で構成した埋め込み $f\colon X \to \ell_2^{2^n}$ が任意の $x, y \in X$ に対して $\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \mu(x, y)$ を満たすことを証明せよ．

演習問題 2 任意の $p \geq 1$ を固定する．このとき，n 点から成る任意の距離空間が ℓ_p へ歪み $O(\log n)$ で埋め込めることを証明せよ．ヒント：講義で用いた ℓ_2 に対する埋め込みを改変してみよ．次の Hödler の不等式を用いてもよい.「$1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$ を満たす任意の p, q と任意の $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\|x\|_p \|y\|_q \geq \sum_{i=1}^{d} |x_i y_i|$ が成り立つ.」

演習問題 3 $(-)$ Q_d を d 次元 Hamming 立方体とする．Q_d の頂点数が 2^d で，辺数が $d2^{d-1}$ であることを示せ.

演習問題 4 $(*-)$ 任意の 4 点 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^d$ に対して $\|x_1 - x_3\|_2^2 + \|x_2 - x_4\|_2^2 \leq \|x_1 - x_2\|_2^2 + \|x_2 - x_3\|_2^2 + \|x_3 - x_4\|_2^2 + \|x_4 - x_1\|_2^2$ が成り立つことを示せ.

演習問題 5 $(*)$ d 次元 Hamming 立方体上の最短パス距離 (辺重みはどれも 1) が ℓ_2 に歪み $\sqrt{d}$ で埋め込めることを証明せよ.