凡例： $(*)$ 推奨； $(-)$ 易； $(+)$ 難

以下の問題において,「最適化問題 $\inf\{f(x) \mid x \in \Omega\}$ が線形計画問題であることを示せ」というものは，講義で示した形式に最適化問題を書き直すことができること，すなわち線形計画問題の場合では，ある自然数 n', m' と実ベクトル $a'_1, \ldots, a'_{m'}, c' \in \mathbb{R}^{n'}$，実数 $b'_1, \ldots, b'_{m'} \in \mathbb{R}$ に対して，$\inf\{f(x) \mid x \in \Omega\} = \inf\{c'^\top x' \mid a'_i x' = b'_i, i \in \{1, \ldots, m'\}, x' \geq 0\}$ と書けることを意味する．ただし，$m', n', a'_1, \ldots, a'_{m'}, c', b'_1, \ldots, b'_{m'}$ が簡単に計算できるものほど望ましい.「半正定値計画問題であることを示せ」についても同様である.

演習問題 1 $(*)$ 次の最適化問題 $\inf\{c^\top x \mid a_i^\top x \geq b_i, i \in \{1, \ldots, m\}\}$ が線形計画問題であることを示せ．ただし，$a_i \in \mathbb{R}^n$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$, $b_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$, $c \in \mathbb{R}^n$ とする.

演習問題 2 $(*)$ 次の最適化問題 $\inf\{\|x\|_\infty \mid a_i^\top x = b_i, i \in \{1, \ldots, m\}, x \geq 0\}$ が線形計画問題であることを示せ．ただし，$a_i \in \mathbb{R}^n$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$, $b_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$ とする.

演習問題 3 $(*)$ 線形計画問題 $\inf\{c^\top x \mid a_i^\top x = b_i, i \in \{1, \ldots, m\}, x \geq 0\}$ の双対問題が線形計画問題であることを示せ．ただし，双対問題とは $\sup\left\{\sum_{i=1}^m b_i y_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^m y_i a_i + s = c, s \geq 0\right\}$ であり，$a_i \in \mathbb{R}^n$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$, $b_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$, $c \in \mathbb{R}^n$ とする.

演習問題 4 $(-)$ 線形計画問題が半正定値計画問題であることを示せ.

演習問題 5 $(-)$ 次の最適化問題 $\inf\{C \bullet X \mid a_i^\top X a_i = b_i, i \in \{1, \ldots, m\}, X \succeq O\}$ が半正定値計画問題であることを示せ．ただし，$a_i \in \mathbb{R}^n$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$, $b_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とする.

演習問題 6 $(+)$ 次の最適化問題 $\inf\{c^\top x \mid x^\top Q_i x + a_i^\top x + \gamma_i = b_i, i \in \{1, \ldots, m\}, x \geq 0\}$ が半正定値計画問題であることを示せ．ただし，Q_i は対称半正定値行列である $(i \in \{1, \ldots, m\})$ とし，$a_i \in \mathbb{R}^n$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$，$b_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$，$c \in \mathbb{R}^n$ とする．ヒント : Q_i の対称半正定値性から $Q_i = R_i R_i^\top$ という分解が可能であることを利用してみよ.

演習問題 7 $(*)$

1. 2 つの対称半正定値行列 $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して，$X \bullet Y \geq 0$ が成り立つことを示せ.
2. 半正定値計画問題の弱双対定理を証明せよ.

演習問題 8 $(-)$ 半正定値計画問題 $\inf\left\{x \,\middle|\, \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \succeq O\right\}$ は $(-\infty$ でも $+\infty$ でもない$)$ 最適値を持つが，最適解は持たないことを示せ.

演習問題 9 $(-)$ 半正定値計画問題 $\inf\left\{x \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2x & 2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & x & 1 \end{pmatrix} \succeq O\right\}$ を解いてみよ．最適値と最適解は何だろうか？

演習問題 10 行列 $X \in \mathbb{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}$ を

$$X = \left(\begin{array}{c|cc|c|cc|c|cc}
x_1 - 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & x_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & x_1 & x_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_i & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & x_i & x_{i+1} & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & x_n
\end{array}\right)$$

で定義する．このとき，半正定値計画問題 $\inf\{x_n \mid X \succeq O\}$ を解いてみよ．最適値と最適解は何だろうか？