情報基礎数理学特選	**2011 年 1 月 11 日 (1)**
有限距離空間の離散幾何学とアルゴリズム	**岡本 吉央**

凡例： $(*)$ 推奨； $(-)$ 易； $(+)$ 難

演習問題 1 $(*-)$ 任意の距離空間 (X,μ) を考える．任意の要素 $x,y \in X$ に対して $\mu(x,y) \geq 0$ が成り立つことを証明せよ．

演習問題 2 $(-)$ 任意の距離空間 (X,μ) を考える．関数 $\mu' \colon X \times X \to \mathbb{R}$ を $\mu'(x,y) = \frac{\mu(x,y)}{1+\mu(x,y)}$ で定義する．このとき，(X,μ') が距離空間になることを証明せよ．

演習問題 3 $(-)$ 任意の自然数 d と，$\mathbb{R}^d$ 上の任意のノルム $\|\cdot\|$ を考える．このとき，関数 $\mu \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $\mu(x,y) = \|x-y\|$ で定義すると，$(\mathbb{R}^d,\mu)$ が距離空間になることを証明せよ．

演習問題 4 有限集合 Σ と自然数 d に対して，Σ^d 上のハミング距離とは，関数 $\mu \colon \Sigma^d \times \Sigma^d \to \mathbb{R}$ で，

$$\mu(x,y) = |\{i \in \{1,\ldots,d\} \mid x_i \neq y_i\}|$$

と定義されるもののことである．(Σ^d,μ) が距離空間になることを証明せよ．

演習問題 5 任意の有限擬距離空間 (X,μ) を考える．ただし，$|X| = n$ とする．このとき，(X,μ) が ℓ_∞^{n-1} 等長埋め込み可能であることを証明せよ．

演習問題 6 $(*)$ 任意の自然数 d に対して，d 次対称半正定値行列全体の集合が錐であることを証明せよ．

演習問題 7 $(*)$ 有限擬距離空間 (X,μ) を考える．ただし，$X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ とする．このとき，(X,μ) が ℓ_2 等長埋め込み可能であるための必要十分条件は，次に定義する行列 $G \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ が対称半正定値であることである．

$$g_{i,j} = \frac{1}{2}(\mu(x_i,x_n)^2 + \mu(x_j,x_n)^2 - \mu(x_i,x_j)^2) \quad (\text{ただし，} i,j \in \{1,\ldots,n-1\}).$$

これを証明せよ．

演習問題 8 $(*)$ 任意の有限集合 X に対して，X 上の ℓ_1 等長埋め込み可能擬距離空間全体の集合が錐になることを証明せよ．

演習問題 9 $(*)$ ある有限集合 X に対して，X 上の ℓ_2 等長埋め込み可能擬距離空間全体の集合が錐にならないことを証明せよ．