復習問題

1. 次の用語の意味を説明せよ．
   - 有理多面体
   - 整数多面体 (整多面体)
   - 01 多面体
   - ユニモジュラ行列 (単模行列)
   - 完全ユニモジュラ行列 (完全単模行列)
   - Hoffman-Kruskal の定理
   - ネットワーク行列
2. 完全ユニモジュラ行列の転置行列も完全ユニモジュラであることを証明せよ．
3. 次の行列は完全ユニモジュラであるかどうか判定せよ．

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. $m \times n$ 整数行列 A のランクは m であるとする．凸多面体 $P = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ は頂点を持つとする．A がユニモジュラであるとき，任意の m 次元整数ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して P は整数多面体になる．これを証明せよ．
5. A を $m \times n$ 整数行列とする．A が完全ユニモジュラであるとき，任意の m 次元整数ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して凸多面体 $P = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ は整数多面体になる．これを証明せよ．
6. ネットワーク行列が完全ユニモジュラであることを証明せよ．

理解力増強問題

1. 行列 A が完全ユニモジュラであるとき，$[A \mid -A]$ も完全ユニモジュラであることを示せ．

2. $m \times n$ 行列 A が完全ユニモジュラであるとき，そのときに限り，$[A \mid I]$ はユニモジュラであることを示せ．ただし，I は $m \times m$ 単位行列である．

3. $m \times n$ 行列 A のランクは m であるとして，B を A の $m \times m$ 部分行列で正則なものとする．A が完全ユニモジュラであるとき，$B^{-1}A$ も完全ユニモジュラであることを示せ．

4. $m \times n$ 整数行列 A のランクが m であり，凸多面体 $P = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ を考える．ここで，A がユニモジュラであるとき，P が整数多面体になることを証明せよ．

5. $G = (V, E)$ を有向グラフ，$T = (G, E')$ を有向全域木とする．A を G の接続行列，B を T の接続行列，N を G と T から得られるネットワーク行列とする．このとき，$A = BN$ が成り立つことを証明せよ．

6. 無向グラフの接続行列が完全ユニモジュラであるとき，そのときに限り，そのグラフは二部グラフであることを証明せよ．
(ヒント：二部グラフの接続行列が完全ユニモジュラであることは直接証明することもできるし，または，二部グラフの接続行列がネットワーク行列を確認することでも証明できる．二部グラフでないグラフには必ず奇数長の閉路が含まれる．奇数長閉路の接続行列の行列式の絶対値が 2 になることを示せ．)

7. 01 行列で，各列において 1 が連続して出現するようなものはネットワーク行列である．これを示せ．