復習問題

1. **次の用語の意味を説明せよ．**
   - **整数計画問題．**
   - **ナップサック問題．**
   - 01 **整数計画問題．**
   - **巡回セールスマン問題．**
   - **混合整数計画問題．**
   - **緩和，線形計画緩和．**
2. **次の整数計画問題を図解法で解いてみよ．**

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & 9x_1 + 4x_2 \leq 36, \\ & 3x_1 + 6x_2 \leq 18, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3. **次の混合整数計画問題を図解法で解いてみよ．**

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & 9x_1 + 4x_2 \leq 36, \\ & 3x_1 + 6x_2 \leq 18, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

理解力増強問題

1. 次の 2 つがどちらも巡回セールスマン問題の整数計画問題による定式化であることを確認せよ．ただし，$\delta(v)$ は v に接続する辺全体の集合を，$\delta(S)$ は片方の端点が S に属し，もう片方の端点が $V \setminus S$ に属するような辺全体の集合とする．この 2 つの定式化中でどちらがより優れていると考えられるだろうか?

   (a)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & \text{for all } v \in V, \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 & \text{for all } S \subseteq V \text{ such that } S \neq \emptyset, V, \\
& x_e \in \{0,1\} & \text{for all } e \in E.
\end{array}
$$

   (b)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & \text{for all } v \in V, \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & \text{for all } S \subseteq V \text{ such that } S \neq \emptyset, V, \\
& x_e \in \{0,1\} & \text{for all } e \in E.
\end{array}
$$

2. 無向グラフ $G = (V, E)$ における独立集合とは，頂点の部分集合 $S \subseteq V$ で，S に属するどの 2 頂点も G の辺で結ばれていないもののことである．与えられた無向グラフの最大独立集合を求める問題を 01 線形計画問題として定式化してみよ．

3. ナップサック問題に対して，次のような貪欲アルゴリズムを考える．まず，各荷物 i に対して，その価値 w_i と重量 a_i の比 w_i/a_i を考える．そして，始めに，この比が一番大きなアイテムを選び，ナップサックに詰める．次に，比が二番目に大きなアイテムを選び，ナップサックに詰める．同様にして，比が大きな順にアイテムを選び，ナップサックに詰める．ナップサックの容量に収まる限り，これを続ける．

   このアルゴリズムによって実行可能解が得られることはすぐに分かる．この解の目的関数値と最適値の比が 1 に近ければ近い程，このアルゴリズムで得られた解はよい解であると見なすことができる．

   このアルゴリズムによって得られる解の目的関数値と最適値の比が任意に悪くなる可能性があることを示せ．すなわち，任意に与えられた実数 $\alpha \geq 1$ に対して，今考えている比が α 以上になってしまうようなナップサック問題のインスタンスを与えよ．

4. ナップサック問題の線形緩和問題を解くための多項式時間アルゴリズムを作成せよ．
   (ヒント：上問で考えた比 w_i/a_i をここでも考える．作成したアルゴリズムが正しいことも証明せよ．)