復習問題

1. 次の用語の意味を説明せよ．
   - 凸集合の分離定理．
   - Farkas の補題．
   - 線形計画法の相補性定理．
   - 法錐，法扇
2. 次の線形計画問題に対応する法扇を描いてみよ．その図から，双対問題の最適解を導け．

$$
\begin{array}{rl}
\text{maximize} & x_1 + 3x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 8, \\
& x_1 - x_2 \leq -6, \\
& x_2 \leq 7, \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

3. 「凸集合の分離定理」から「Farkas の補題」を導け．
4. 「Farkas の補題」を用いて「線形計画法の双対定理」を導け．
5. 「線形計画法の基本定理」を証明せよ．
6. 次の線形計画問題の双対問題がそれ自身になることを示せ．

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & A\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{c}, \\
& \boldsymbol{x} \geq 0.
\end{array}
$$

   ただし，A は $A = -A^\top$ を満たすとする．(このような行列は歪対称行列，skew-symmetric matrix，と呼ばれる．) 上のような性質を満たす線形計画問題を自己双対線形計画問題と呼ぶ．

理解力増強問題

1. 線形計画問題で，その双対問題の最適解が一意でないのものを構成せよ．
2. 線形計画問題で，その問題とその双対問題の最適解が共に一意でないものを構成せよ．
3. 相補性定理を証明せよ．
4. 任意の線形計画問題が自己双対線形計画問題として再定式化できることを示せ．
(ヒント：双対性と相補性定理を用いる．)
5. 以下の 3 つの線形計画問題を考える．ただし，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$B \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^\ell$ とする．どの問題にも最適解は存在すると仮定する．

(P1)

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{p}, \\ & B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}$$

(P2)

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{p}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}$$

(P3)

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & B\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{q}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}$$

(a) 問題 (P1)，(P2)，(P3) の双対問題を与えよ．

(b) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$ が成り立つとき，(P1) の最適値は (P2) の最適値と (P3) の最適値の和以下になることを示せ．
(ヒント：問 a はこの問題と関係ない．)

(c) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$ を満たすある $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ が存在して，(P1) の最適値が (P2) の最適値と (P3) の最適値の和に等しくなるようにできることを証明せよ．
(ヒント：(P1) の双対最適解を用いて $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{d}$ を作ることを考える．)

6. 「線形計画法の双対定理」から「Farkas の補題」を導け．
(ヒント：次の線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & \boldsymbol{0}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}$$

Farkas の補題の片方の条件が成り立たないとき，この線形計画問題には実行可能解が存在しない．)