復習問題

1. 線形計画問題に対して，次の用語の意味を説明せよ．
   - 双対問題．
   - 弱双対定理．
   - 双対定理．
2. 弱双対定理を証明せよ．
3. 次の線形計画問題の双対問題を与えよ．

$$\begin{array}{rr} \text{minimize} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{subject to} & -3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 \geq -4, \\ & x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 2, \\ & 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 \geq 3, \\ & -2x_1 - 3x_2 + 3x_4 \geq -2, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

4. 上の問題に対して $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3/2, 0, 0, 1/2)$ が最適解であることを，双対問題の実行可能解 $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (1, 0, 2, 0)$ を用いて証明せよ．(まず，この x が主問題の実行可能解であり，y が双対問題の実行可能解であることを確認せよ．)
5. 次の線形計画問題の双対問題を与えよ．

$$\begin{array}{rr} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

6. 線形計画問題 P の双対問題の双対問題が P 自身になることを証明せよ．

理解力増強問題

1. 非有界な線形計画問題の双対問題は実行不能であることを証明せよ．
2. 実行不能な線形計画問題で，その双対問題も実行不能なものが存在することを証明せよ．
3. 2人のプレイヤー A と B があるゲームをする．A の可能な戦略は $a_1, \ldots, a_n$ であり，B の可能な戦略は $b_1, \ldots, b_m$ であるとする．A と B は互いに相手の可能な戦略を知っていて，一斉に自分の取る戦略を公表する．A が戦略 a_i を取り，B が戦略 b_j を取るとき，A は p_{ij} の利得を得て，B は $-p_{ij}$ の利得を得るとする．(すなわち，A と B の利得の和は 0 である．p_{ij} は正であっても負であっても 0 であってもよい．) 各戦略に対してどのような利得が得られるのかということも A と B は知っている．

(a) プレイヤー A は戦略 a_i を確率 x_i で取るとする．x_i が確率であるためには，全ての $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $x_i \geq 0$ であり，$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ となることが必要十分である．同様に，プレイヤー B は戦略 b_j を確率 y_j で取るとする．ここで，第 (i, j) 成分が p_{ij} であるような $n \times m$ 行列を P とすると，プレイヤー A の利得の期待値は $\boldsymbol{x}^\top P\boldsymbol{y}$ であることを確認せよ．(同様に，プレイヤー B の利得の期待値は $-\boldsymbol{x}^\top P\boldsymbol{y}$ である．

(b) 今，プレイヤー B の取る戦略の確率 $\boldsymbol{y}$ が分かっているとき，プレイヤー A が得られる利得の期待値を最大化する確率 $\boldsymbol{x}$ を求める問題を定式化すると，次の問題になることを確認せよ．

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \boldsymbol{x}^\top P\boldsymbol{y} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0.
\end{aligned}
$$

また，以下の問題がこの問題の双対問題になることを確認せよ．(ただし，双対変数を $u \in \mathbb{R}$ としている．)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & u \\
\text{subject to} \quad & u \geq (P\boldsymbol{y})_i \quad \text{for all } i \in \{1, \ldots, n\}.
\end{aligned}
$$

(c) 上問の主問題と双対問題に実行可能解が存在することを示せ．

(d) 上問と双対定理を考えると，主問題と双対問題の最適値が等しいことが分かる．そうすると，プレイヤー B は双対問題の目的関数 u の値を出来るだけ小さくするように確率分布 $\boldsymbol{y}$ を選ぶ必要がある．その問題は次の線形計画問題で記述できる．

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & u \\
\text{subject to} \quad & u - (P\boldsymbol{y})_i \geq 0 \quad \text{for all } i \in \{1, \ldots, n\}, \\
& \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, \\
& y_1, \ldots, y_m \geq 0.
\end{aligned}
$$

構成法から，この線形計画問題の最適値は $\min_{\boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^\top P\boldsymbol{y}$ になる．この問題の双対問題は

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & v \\
\text{subject to} \quad & v + (\boldsymbol{x}^\top P)_j \leq 0 \quad \text{for all } j \in \{1, \ldots, m\}, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0.
\end{aligned}
$$

となり (双対変数は $v \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ である)，この問題の最適値が $\max_{\boldsymbol{x}} \min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{x}^\top P\boldsymbol{y}$ になることを証明せよ．

(e) 上問の主問題と双対問題が実行可能であることを確認することで，

$$
\min_{\boldsymbol{y}} \max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^\top P\boldsymbol{y} = \max_{\boldsymbol{x}} \min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{x}^\top P\boldsymbol{y}
$$

を証明せよ．