

復習問題

1. 次の用語の意味を説明せよ.

- 凸集合.
- アフィン結合, 凸結合.
- アフィン包, 凸包.
- 超平面, 半空間.
- 凸多面体, ポリトープ.
- 妥当不等式, 支持超平面.
- 凸多面体の面. 頂点, 辺, ファセット.
- 線形計画問題の端点解.

2. 2つの凸集合の共通部分も凸集合になることを証明せよ.

3. 2つの凸集合の合併が必ずしも凸集合になるとは限らないことを証明せよ.

4. 次の線形計画問題を図解法, および, 端点解列挙法によって解け.

(a)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 8, \\ & x_1 - x_2 \leq 6, \\ & x_2 \leq 7, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{subject to} & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

理解力増強問題

1. \mathbb{R}^n における m 個の点 x^1, x^2, \dots, x^m がアフィン独立であるための必要十分条件は \mathbb{R}^{n+1} における m 個のベクトル $\begin{pmatrix} x^1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x^m \\ 1 \end{pmatrix}$ が線形独立であることを証明せよ.
2. 2つの集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, その Minkowski 和を $A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$ で定義する. A と B が凸集合であるとき, $A+B$ も凸集合になることを証明せよ.
3. 次の不等式系で定められる \mathbb{R}^n における凸多面体を考える.

全ての $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して $0 \leq x_i \leq 1$.

この凸多面体の頂点数が 2^n 以上であることを示せ.

(実際, ちょうど 2^n になる. この演習問題の結果から, 端点解列挙法による線形計画問題の解法の計算量が指数関数的になることが分かる.)

4. 与えられたポリトープ P の頂点と辺から, 自然にグラフ G を作ることが出来る. すなわち, P の頂点全体の集合を G の頂点集合として, 2 頂点が P の辺で結ばれているとき, そのときに限り, その 2 頂点が G においても辺で結ばれるとするのである. そのようにして作られたグラフをポリトープ P のグラフと呼ぶ.
 - (a) 頂点数 $n+1$ の完全グラフがある n 次元ポリトープのグラフになることを証明せよ.
 - (b) どのようなポリトープのグラフにもならないようなグラフを構成せよ. (理由も示せ.)
5. 3 次元ポリトープのグラフが必ず平面的になること, すなわち, 平面上に辺の交差が無く描けること, を証明せよ.

(厳密な証明は厄介なので, 証明のスケッチを与えれば十分とする.)
6. ポリトープ P が不等式系によって与えられていて, 点 x が P に含まれるかどうかを判定したい. どのようにすればよいだろうか? そのアルゴリズムの計算量はどれくらいか?

(ヒント: 難しく考え過ぎない. 単純.)
7. ポリトープ P がその端点の集合の凸包として与えられていて, 点 x が P に含まれるかどうかを判定したい. どのようにすればよいだろうか? そのアルゴリズムの計算量はどれくらいか?