例えば，平面上で $\mathrm{conv}(X)$ は X の点を頂点とする三角形全体の和集合である．この定理の証明は後の節の演習問題とする．

互いに交わらない凸集合の超平面による分離可能性は凸集合に関する基本的な結果である．

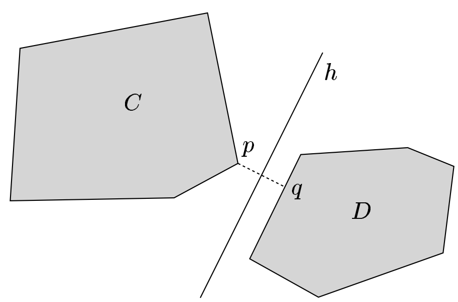
1.2.4 定理 (分離定理 (separation theorem)). 凸集合 $C, D \subseteq \mathbf{R}^d$ が $C \cap D = \emptyset$ を満たしているとする．このとき，超平面 h で，C は h の定める閉半空間の片方に入っていて，D は反対側の閉半空間に入っているようなものが存在する．別の言い方をすると，単位ベクトル $a \in \mathbf{R}^d$ と実数 $b \in \mathbf{R}$ で全ての $x \in C$ に対して $\langle a, x\rangle \geq b$ が成り立ち，全ての $x \in D$ に対して $\langle a, x\rangle \leq b$ の成り立つものが存在する．

C と D が閉集合で，少なくとも片方が有界であるときには，真に分離することができる．すなわち，上の条件に加えて $C \cap h = D \cap h = \emptyset$ も満たすような h が存在する．

特に，閉凸集合は 1 点から真に分離することができる．ここから，閉集合 X の凸包が X を含む閉半空間全体の交わりと等しいことがわかる．

証明の概略． 最初に，C と D がコンパクト (すなわち，有界で閉) である場合を考える．このとき，直積 $C \times D$ もコンパクト空間であり，距離関数 $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ の最小値を与える $C \times D$ の中の点が存在する．すなわち，2 点 $p \in C, q \in D$ で C と D の距離が p と q の距離と等しくなるものが存在する．

所望の分離超平面 h は線分 pq と垂直で，この線分の中点を通るようなものとして選ぶことができる．



超平面 h が実際に C と D のどちらとも交わらないことは簡単に確認できる．

D がコンパクトで，C が閉であるときは，C と大きな球の交わりとしてコンパクトな集合 C' をとってくることができる．この球が十分に大きければ，C と D の距離が C' と D の距離と同じになるようにできる．よって，C と D の距離はある $p \in C'$ と $q \in D$ において与えられ，前の議論を使うことが可能になる．

互いに交わらない任意の凸集合 C と D の場合は証明はもう少し長くなる．まず，C と D を超平面で分離することと，凸集合 $C - D = \{x - y\colon x \in C, y \in D\}$ を点 0 か

ら超平面で分離することが同値であることを観察して，状況を単純化する．(同値性の証明は簡単な演習問題である．このトリックは証明の最初の部分で用いることもできた．) したがって，0 を含まない任意の凸集合 C と $D = \{0\}$ を分離することを考えれば十分である．

$0 \notin \overline{C}$ のとき (ここで，$\overline{C}$ は C の閉包を表す)，証明の最初の部分から証明が終わる．よって，$0 \in \overline{C}$ を仮定する．このとき，0 が $\overline{C}$ の境界上の点であることを主張する．これの証明は背理法で行なう．点 0 が境界上にないとき，0 を中心とする開球 B で，$B \subseteq \overline{C}$ を満たすものが存在する．座標系の倍率を適当に変更することで，B が点 $p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}$ を含むと仮定できる．(ただし，各 $i = 1, 2, \ldots, d$ に対して，$p_i = e_i$ (第 i 標準単位ベクトル) として，$p_{d+1} = -(e_1 + e_2 + \cdots + e_d)$ とする．) 簡単な計算から，$\mathrm{conv}\{p_1, \ldots, p_{d+1}\}$ が 0 の小さな近傍を含むことがわかる．(これは極めて直感的である．) $B \subseteq \overline{C}$ が成り立つので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，p_i から距離が高々ε しか離れていない点 $p'_i \in C$ が存在する $(i = 1, \ldots, d+1)$．再び，簡単な計算から，$\varepsilon > 0$ が十分小さいときに $\mathrm{conv}\{p'_1, \ldots, p'_{d+1}\} \subseteq C$ が 0 を含むことがわかる．しかし，$0 \notin C$ と仮定していたので，これは矛盾である．主張が証明できた．

このようにして，0 が $\overline{C}$ の境界上にあることがわかったので，0 は $\overline{C}$ の補集合の閉包上にもあることになる．したがって，$\mathbf{R}^d \setminus \overline{C}$ における点の列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ で 0 に収束するものを選ぶことができる．各 q_n は閉凸集合 $\overline{C}$ の外側にあり，ゆえに，q_n と $\overline{C}$ をある超平面 $h_n = \{x \in \mathbf{R}^d\colon \langle a_n, x\rangle = b_n\}$ で (真に) 分離できる．ここで，a_n は単位ベクトル，$b_n \in \mathbf{R}$ は実数である．数列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ は有界なので (これも少し議論が必要である)，コンパクト性より，$d+1$ 個の成分を持つベクトル $(a_n, b_n) \in \mathbf{R}^{d+1}$ には集積点 (a, b) が存在する．そして，背理法によって，超平面 $h = \{x \in \mathbf{R}^d\colon \langle a, x\rangle = b\}$ が C と 0 を (真にではないかもしれないが) 分離することを示すことができる．　□

分離定理の重要性は数学の様々な分野においていろいろな形で現れることからわかる．おそらく元々は関数解析の分野からきていて，そこでは無限次元空間に対する言明として証明されている．本質的にこれは Hahn–Banach の定理と呼ばれているものである．関数解析の手法を使った通常の証明はここで私たちが行なったものとは違って，ある意味，よりエレガントで抽象的である．ここで見た証明は $\mathbf{R}^d$ のより特殊な性質を用いているが，C と D がコンパクトである場合についてはとても短くて直観的になっている．

線形計画法との関連.　線形計画法 (linear programming) の理論の基本的な結果に Farkas の補題というものがある．これは，(第 10.1 節で議論する) 線形計画法の双対性の特殊な場合になっていて，双対性の証明において鍵となるステップにもなっている．

1.2.5 補題 (Farkas の補題 (Farkas lemma) の多くのバージョンの中の 1 つ). 任